Undersøgende matematikundervisning (UM)
– et program for samspil mellem udvikling af praksis og matematikdidaktisk forskning

Morten Blomhøj, tiltrædelsesforelæsning
som professor ved DPU, AU.
Åbningskonferencen for NCUM
2. oktober 2020

DPU
AARHUS UNIVERSITET

Plan

1. Hvad er UM og hvorfor er det et godt udgangspunkt for samspil mellem udvikling af praksis og matematikdidaktisk forskning?
2. En didaktisk model for udvikling og analyse af UM
3. Fire eksempler: Morgenbrusebadet; 100m løbet; Astma-medicinering samt Festen - alkoholforbrænding
4. Samspil mellem forskning og udvikling af praksis i UM

DPU
AARHUS UNIVERSITET

1. Hvad er UM? – en løselig definition

- UM er tilrettelagt bevidst for at **motivere og støtte** elevernes undersøgende arbejde ***i*** eller ***med*** **matematik**.
- Der er fokus på at etablere og **overdrage til eleverne** sammenhørende spørgsmål, som kan være styrende for deres undersøgende arbejde.
- I UM arbejder eleverne med at afgrænse og formulere spørgsmål, opsøge information, gennemføre (empiriske) undersøgelser, danne og teste hypoteser, behandle og løse matematiske problemer, samt konstruere og analysere modeller.
- Det er en selvstændig pointe i UM, at der etableres **”erindrings-knager”** som eleverne kan bruge til at genkalde sig den undersøgende aktivitet og tilhørerende matematiske pointer.

1. Hvad er UM? – en løselig definition

- I UM er der fokus på **centrale faglige erkendelser** som eleverne kan udvikle **via det undersøgende arbejde**. Lærerens refleksioner over, hvordan disse erkendelser **kan støttes** for forskellige elevgrupper er central.
- **Dialog** mellem eleverne og med læreren spiller en central, men forskellig rolle i de forskellige faser af UM.

  (Sfard, 2007); (Alrø & Skovsmose, 2002)
- **Udpegning**, **forankring** og (efterfølgende) **bearbejdning** af matematiske begreber, metoder og pointer i det undersøgende arbejde er udgangspunkt for opbygning af fælles matematik-viden og udvikling af matematiske kompetencer.

DPU
AARHUS UNIVERSITET

1. Hvorfor er UM relevant for udvikling af praksis?

- UM findes i grundskolen og i de gymnasiale uddannelser, men ikke som en almindeligt forekommende praksis med klare matematik-didaktiske begrundelser
- UM kan styrke matematikundervisningens **bidrag til almendannelse** (Blomhøj, 2016, 2001)
- UM kan bidrage til at nuancere **elevernes billede af matematik**
- UM kan skabe motivation for og støtte til **matematiklæring med dybde og forståelse**
- UM kan danne ramme om **fagsamspil** – fx i STEM sammenhæng
- UM kan skabe rammer for **integration af it-værktøjer** i elevernes arbejde med matematik

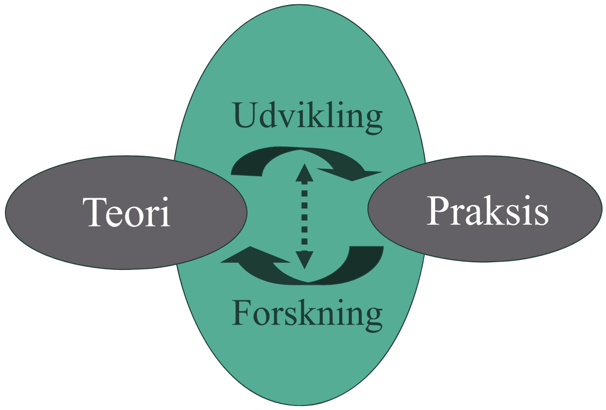
DPU AARHUS UNIVERSITET

1. Hvorfor UM som forskningsprogram?

- UM kan analyseres og yderligere teoretiseres inden for en række matematikdidaktiske teoridannelser (Artigue & Blomhøj, 2013)
- UM omfatter **matematisk modellering** og giver mulighed for at videreføre og profilere min forskning inden for dette område (Blomhøj, 2020, 2019,); (Blomhøj & Kjeldsen, 2018, 2014, 2011, 2010, 2010a); samt (Blomhøj & Højgaard, 2007)
- UM **promoveres politisk** – bl.a. i sammenhæng med IBSE og IT i EU-projekter og rummer gode muligheder for ekstern finansiering af FoU projekter (Blomhøj, Haavold og Petersen, under review); (Blomhøj, 2020a); (Artigue & Blomhøj, 2013)
- UM er **eksemplarisk for samspil** mellem praksis og matematik-didaktisk forskning og i resonans med **visionen for NCUM**
- UM rejser interessante erkendelsesteoretiske spørgsmål

Samspil mellem udvikling af praksis og forskning

NCUM



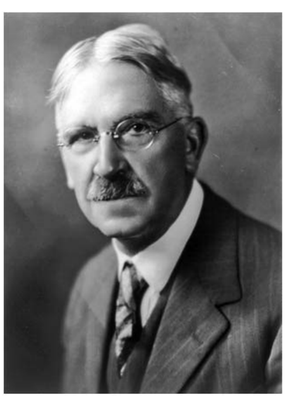
I synergi med visionen for NCUM

(Blomhøj, 2008)

DPU AARHUS UNIVERSITET

Dewey's uddannelsesteori som grundlag for UM

NCUM



John Dewey (1859-1952)

- Mennesket søger at forstå og beherske sin omverden gennem undersøgende og problemløsende adfærd (***reflective inquiry***).
- Videnskabelig viden er udviklet gennem raffinering og kultivering af denne **grundlæggende erkendelsesinteresse**.
- Gyldig (sand) viden er effektiv til forståelse af fænomener og løsning af problemer, samt til organisering af viden.
- Uddannelse skal tjene udvikling af demokrati ved at **danne den enkelte** til at lære gennem **undersøgelse og refleksion i sociale fællesskaber**.
- Eleverne skal **opleve viden** som **meningsfuld og effektiv** til organisering af deres erfaring og til forståelse af omverdenen.
- Elevernes erfaring og viden er **grundlaget for tilrettelæggelse** af undervisning, og viden almengøres gennem **fælles refleksioner over fælles erfaringer**.

(Dewey, 1933, 1938), Hiebart et al. (1996), (Artigue & Blomhøj, 2013)

Tre forskningsspørgsmål til UM

1. Hvordan kan UM didaktiseres og hvilke matematikdidaktiske begrundelser og udfordringer knytter sig hertil på forskellige trin i uddannelsessystemet?
2. Hvilke potentialer rummer UM i forhold til at skabe motivation for, samt dybde, sammenhæng og progression i elevernes matematiklæring i de enkelte forløb såvel som i længere læringsforløb over flere år og i hele uddannelsesforløbet?
3. Hvordan kan samspil mellem udvikling og udbredelse af UM og matematikdidaktisk forskning forstås teoretisk og styrkes i praksis?

DPU AARHUS UNIVERSITET

2. En didaktisk model for UM

Didaktisering af UM er udviklet fra PRIMAS, afprøvet og udforsket i danske udviklingsprojekter samt i SUM projektet i Tromsø (Artigue & Blomhøj, 2013); (Blomhøj, 2016, 2020a og b); (Haavold & Blomhøj, 2019), (Blomhøj, Haavold & Pedersen, under review)

Forskning kan videreføres med henblik på:

- Didaktisering til klassetrin ved kombination med elevperspektiv, kompetencemål og indhold (Blomhøj & Højgaard, 2007, 2011)
- Didaktisk modellering, faglig klasseledelse og scenariedidaktik (Blomhøj & Højgaard, 2020, 2021)
- Anvendelse af IT i UM på grundlag af Blomhøj (2016, 2006, 2001) samt brug af IT ved matematisk modellering (Blomhøj 2020, 2019); (Blomhøj & Elicer, under udarbejdelse)

DPU AARHUS UNIVERSITET

NC UM

En 3-faset didaktisk model for UM

1. **Iscenesættelse af forløbet over for eleverne**
   - overdragelse af udfordringen/problemet til eleverne
   - etablering af det didaktiske miljø for arbejdet
   - formidling af de tidsmæssige og praktiske rammer
   - klargøring af produktkrav og bedømmelsesform
2. **Elevernes selvstændige undersøgende arbejde**
   - tilstrækkelig tid, frihed og støtte til, at eleverne kan arbejde selvstændigt med problemet
   - støtte og udfordring gennem dialog
   - forberedelse gennem konstruktion af dialoger
3. **Fælles refleksion og faglig læring**
   - erfaringer og resultater fra forløbet systematiseres og faglig viden og faglige pointer søges fællesgjort

(Blomhøj, 2013, 2016 og 2020a og b) (Brousseau, 1997)

DPU
AARHUS UNIVERSITET

NC UM

Essentielle elevaktiviteter i UM

- at stille spørgsmål
- at afgrænse og strukturere
- at observere systematisk
- at måle og kvantificere
- at klassificere
- at udvikle definitioner
- at beregne og lave overslag
- at indføre og anvende symboler
- at repræsentere og visualisere

- at anvende og fortolke algebra
- at opstille, fortolke og løse ligninger
- at ræsonnere og bevise
- at danne og teste hypoteser
- at eksperimentere
- at kontrollere variable
- at fortolke og vurdere resultater
- at kommunikere
- ……..

(Blomhøj, 2020a)

Essentielle lærerhandlinger i UM

NC UM

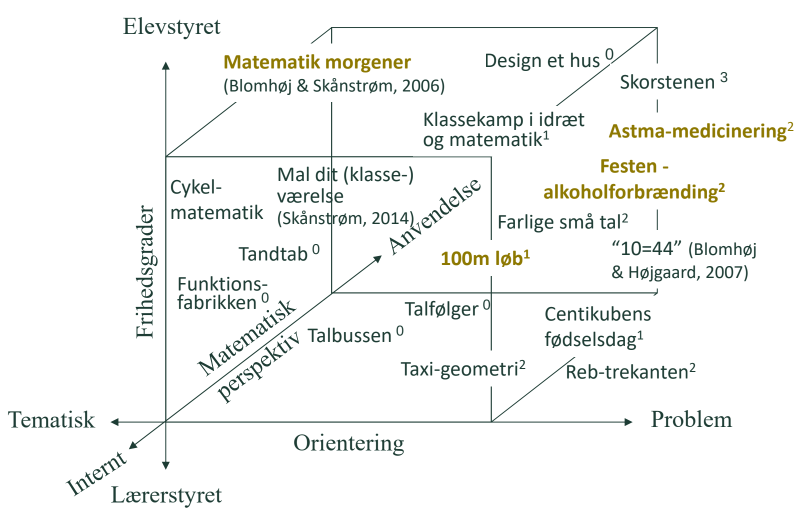
- at sætte scenen for undersøgende aktiviteter
- at inspirere til undersøgende holdning og tilgange til matematik
- at formidle og fællesgøre læringsmål
- at bygge på og udbygge elevernes erfaringer
- at støtte elevernes ejerskab til problemer og projekter
- at skabe rum for dialogisk samspil i klassen
- at opmuntre til spørgsmål og refleksion

- at stille åbne og nysgerrige spørgsmål til elevernes arbejde
- at bemærke og påskønne elevers faglige ideer og ræsonnementer
- at værdsætte forsøg og fejl som grundlag for læring
- at fremme samarbejde
- at udpege og almengøre centrale begreber og metoder
- at evaluere elevernes faglige læring
- at evaluere forløb og udvikle praksis
- …

(Blomhøj, 2020a)

Et didaktisk mulighedsrum for UM

NC UM



[0] SUM [1] (Blomhøj, 2016) ; [2] (Artigue & Blomhøj, 2013); [3] (Blomhøj, 2020a) (Skånstrøm & Blomhøj, 2016)

DPU AARHUS UNIVERSITET

Tre forskningsspørgsmål til UM

1. Hvordan kan UM didaktiseres og hvilke matematikdidaktiske begrundelser og udfordringer knytter sig hertil på forskellige trin i uddannelsessystemet?
2. Hvilke potentialer rummer UM i forhold til at skabe motivation for, samt dybde, sammenhæng og progression i elevernes matematiklæring i de enkelte forløb såvel som i længere læringsforløb over flere år og i hele uddannelsesforløbet?

DPU
AARHUS UNIVERSITET

Forankring, sammenhæng og progression via UM

Fokus på bærende matematiske og matematikdidaktiske ideer (i eksemplerne):

- Variabel begrebet: Diskrete og kontinuerte variable
- **Funktionsbegrebet**: Entydig tilordning mellem en uafhængig variabel og en afhængig variabel; og trinvis beskrivelse af sammenhørende variation i en uafhængig og en afhængig variabel
- **Trinvis beskrivelse** af dynamiske processer som **forankring og foregribelse** af udvikling af begreber om numerisk og analytisk **integration** og om **differentialligning**
- **Infinitesimalregningens hovedsætning** og dens forankring i (kompartment-) **modellering af dynamiske processer**
- Arbejde inden for og med **omformning** mellem **repræsentationsformer**
- Fokus på **proces – objekt dualiteten** i dannelsen af centrale begreber
- Overgangen fra **”*model af*” til ”*model for*”** – fra **horisontal til vertikal matematisering**

DPU
AARHUS UNIVERSITET

3. Eksempel 1: Matematikmorgener og morgenbrusebadet

*Vækkeuret ringer!
Din hånd rammer uret, som falder på gulvet. Du får fat i det og slukker det med et suk.......
Du vender dig om på den anden side og prøver at forestille dig, at det er blevet lørdag. Men så mærker du den – lysten. Lysten til at komme i gang fordi der står Matematik morgener på skemaet.
"Muntre Matematik Morgener med Morten & Mikael", tænker du.
Klokken 8:00 skal du være sammen med alle de andre. En ny og spændende dag står forventningsfuld og venter på at blive taget i brug af netop dig!* (Blomhøj & Skånstrøm, 2006)

DPU AARHUS UNIVERSITET

Så tager du dine matematik-briller på, rejser dig fra din varme seng og går ud på badeværelset. Tjekker måske lige el-måleren undervejs? På badeværelset smiler spejlet til dig, mens du søvndrukkent ser efter, om du er sluppet for bumser i løbet af natten.

*Du børster tænder og forestiller dig måske, hvor sjovt det ville være at se, hvor lang en stribe du kunne lave, hvis du trykkede al tandpastaen ud......
Du lader det varme vand pjaske ned over din krop i flere minutter – hov, hvor meget vand gik der egentlig til det?*

DPU AARHUS UNIVERSITET

Der er også matematik i:

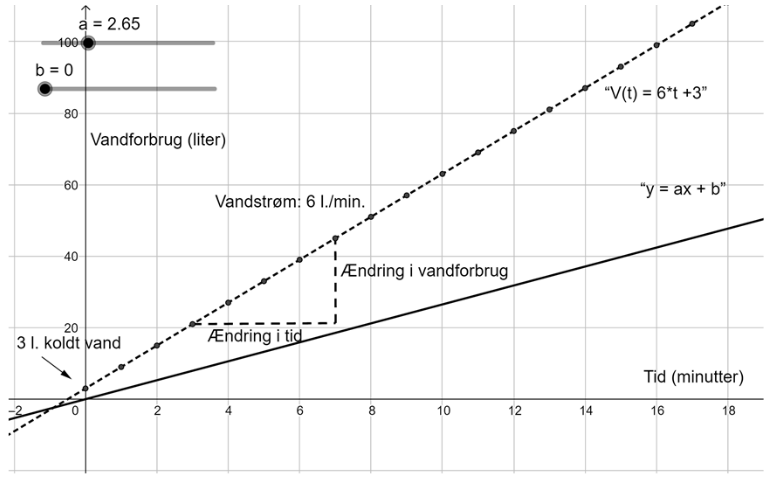
Klokken; vejret; værelset; morgenmaden; rejseplanen; cykelturen; blandt andet …..

Opgaven:

Lav nøjagtige optegnelser over det du ser med dine matematikbriller – fra du vågner til, du møder på skolen. Din notater skal så bearbejdes matematisk, og dine resultater og overvejelser skal formidles på et stykke A3-papir i et indbydende layout. Du har 4 moduler til det hele.

DPU
AARHUS UNIVERSITET

Eksempel 1: Morgenbrusebadet

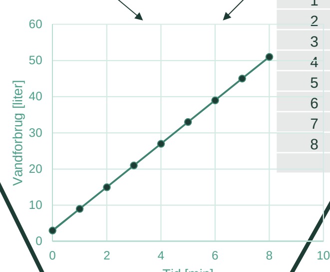


Matematiske begreber og deres repræsentationer

En lineær funktion: (objekt)

Dens repræsentation (tegn/symbol)

$y = 6x+3,\ x \in [0,8]$



t [min]	V [liter]
0	3
1	9
2	15
3	21
4	27
5	33
6	39
7	45
8	51

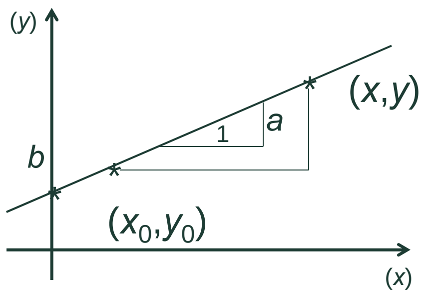
Lineær funktion (begreb)

(Steinbring, 2005)

DPU AARHUS UNIVERSITET

Sammenhængen mellem rette linjer og lineære funktioner

Funktioner med forskriften $f(x) = ax + b$ har en ret linje som graf. a er linjens hældning og $(0, b)$ er linjens skæringspunkt med 2. aksen: $f(0)= a\,0 + b = b$ og $f(x+1) = a(x+1)+b = f(x) + a$



En ret linje gennem (x_0, y_0) har samme hældning, kaldet a, overalt. Så for ethvert punkter (x, y) på linjen gælder:

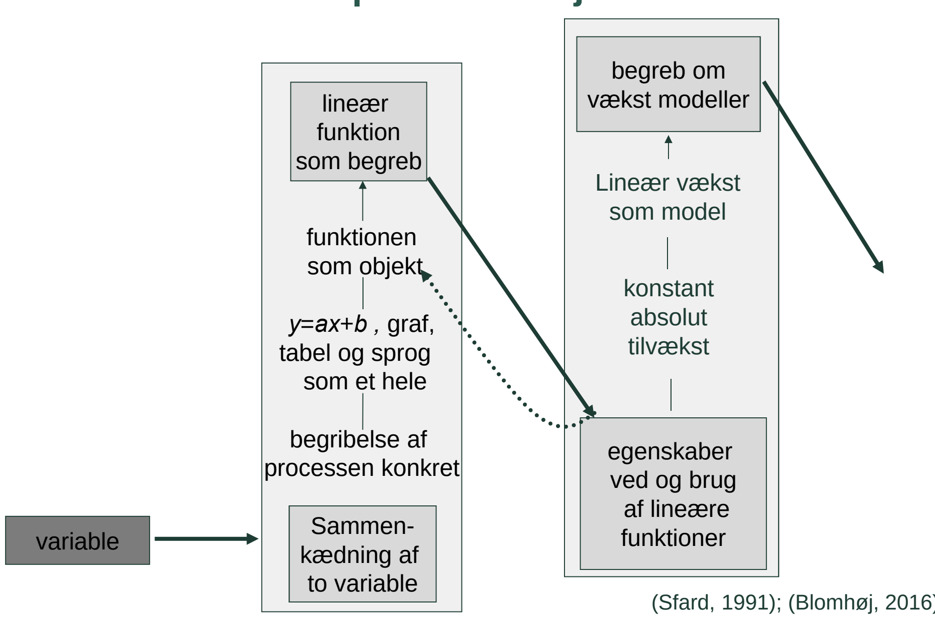
$a = (y - y_0)/(x - x_0), \quad x \neq x_0$

$y - y_0 = a\,(x - x_0)$

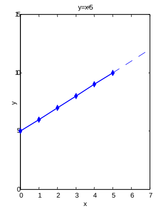
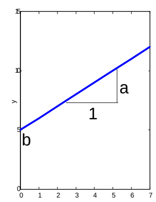
$y = ax - ax_0 + y_0$

$y = ax + b$, med $b = y_0 - ax_0$ er altså en generel ligning for en ikke-lodret ret linje gennem (x_0,y_0), hvor a er hældningen og b skæring med 2. aksen.

Lineær funktion - fra proces til objekt



(Sfard, 1991); (Blomhøj, 2016)

Repræsentationsform	**Sproglig**	**Numerisk**	**Algebraisk**	**Grafisk**
Proces Brusebadet	Jeg bruger 3 l. til start og 6 l. for hvert minut	$V(t)$ fås ved at gange t med 6 og lægge 3 til	$V(t_1)=6t_1+3$ $V(t+1)=V(t)+6$; $V(0)=3$	
Generelt	Ud fra en startværdi for x=0 fås funktionsværdien til x ved at lægge ax til startværdien	y er funktion af x og $y=f(x)$ fås ved at indsætte x-værdi	$f(x) = ax + b$ $f(x+\Delta x)= f(x) + a\Delta x$; $f(x_0)=y_0$	
Objekt Brusebadet	Badetiden t bestemmer vandforbruget til flowet gange t plus det kolde startforbrug	t 0 1 2 3 / V 3 9 15 21	$V(t) = 6t + 3$	
Generelt	En lineær funktion; en lineær kombination med konstant sum; eller en affine afbildning fra R til R	Funktionstabel som en entydig sammenkædning af en uafhængig og en afhængig variabel	$y=f(x)$ $y = ax + b$ $y-y_0=a(x-x_0)$ $ux+vy=w$	

(Blomhøj, 2016); (Blomhøj & Kjeldsen, 2010a) (Duval, 2006)

Brusebadet i ramme af *Realistic Mathematics Education*

1. *aktivitet* i sammenhæng med den konkrete opgave, hvor fortolkning og forståelse af det matematiske indhold og løsning af opgaven er baseret på en forståelse af den konkrete kontekst. ***Situational***

2. *henvisningsaktivitet,* hvor modellen optræder som en *model af* den konkrete situation, der er etableret i undervisningen. ***Referential***

3. *generel aktivitet,* hvor modellen med dens konkrete referencer optræder som *model for* en generel matematisk sammenhæng, og hvor aktiviteterne angår modellens generelle egenskaber og deres forbindelse til den matematiske teori. ***General***

4. *formel matematisk aktivitet,* hvor fortolkning og forståelse af matematikken ikke længere kræver støtte fra situationer, der tjener som model for den matematiske sammenhæng. ***Formal***

(Gravemeijer, 2007, 1999)

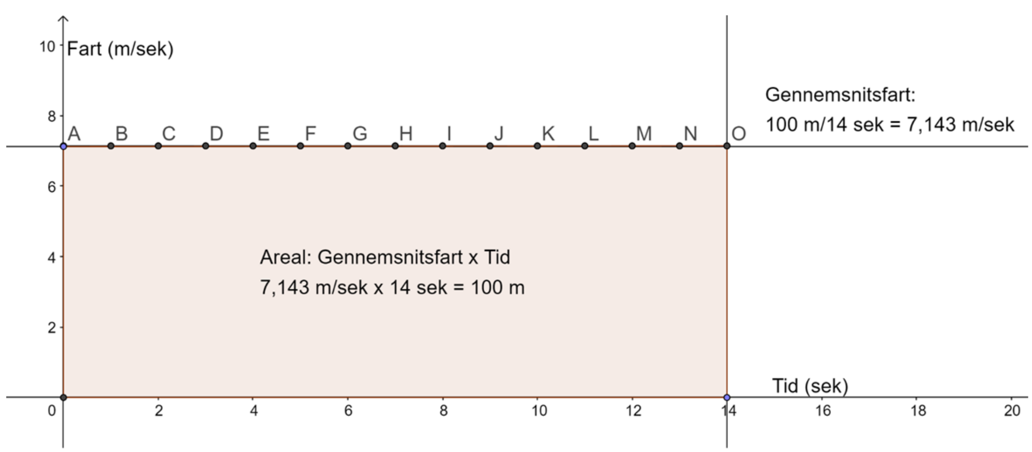
3. Eksempel 2: 100meter løbet – matematikken i bevægelse

Hvordan ser dit 100m løb ud matematisk set?
Hvad blev din gennemsnitfart i m/sek.?
Hvordan ændrede din fart sig undervejs?

(Blomhøj, 2016)

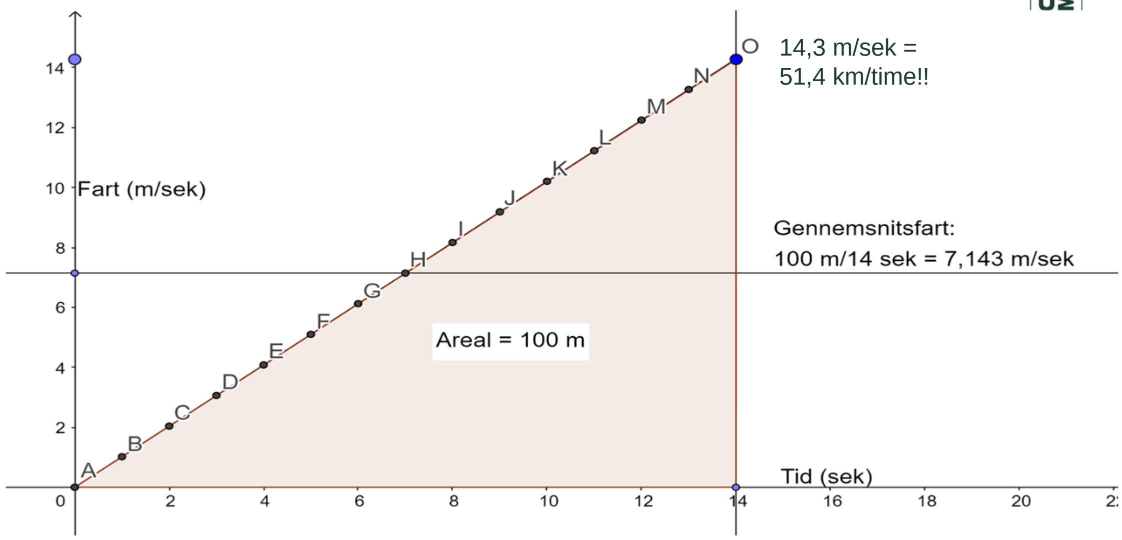
DPU
AARHUS UNIVERSITET

Eksempel 2: 100meter løbet



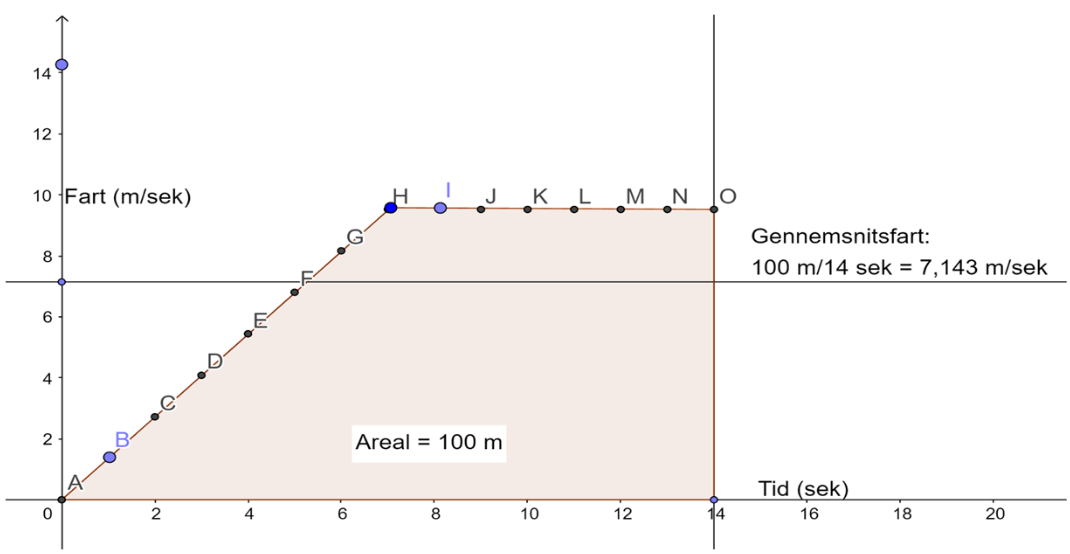
DPU
AARHUS UNIVERSITET

Eksempel 2: 100meter løbet

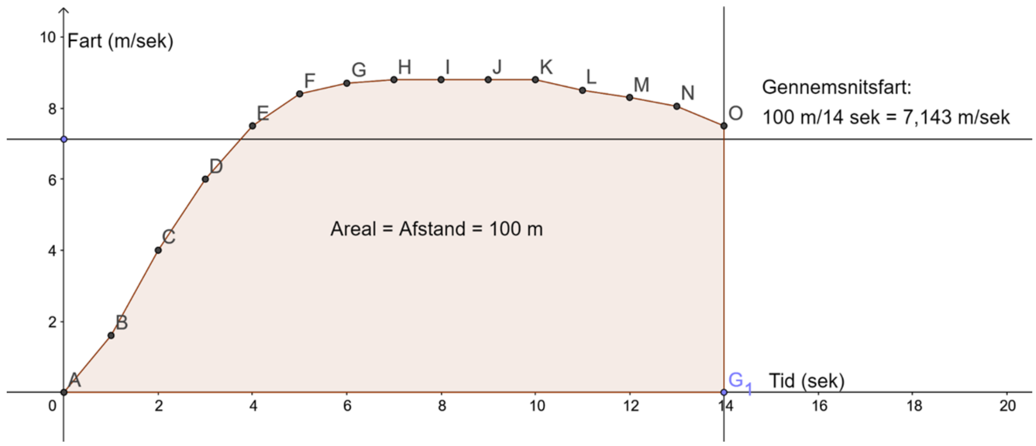


DPU
AARHUS UNIVERSITET

Eksempel 2: 100meter løbet

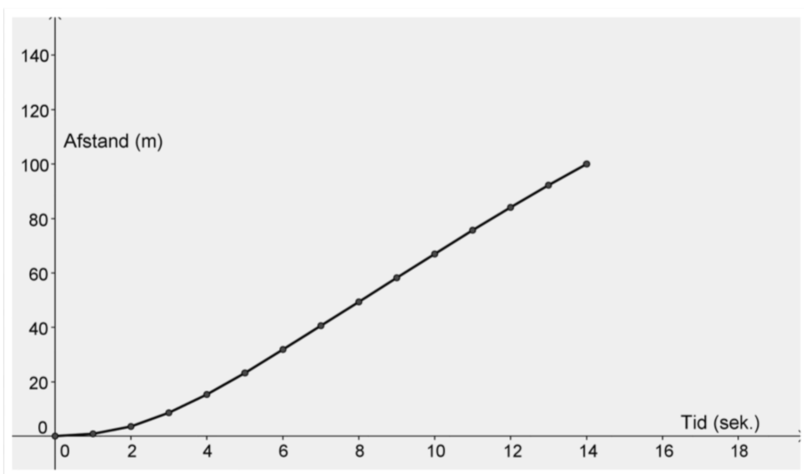


Eksempel 2: 100meter løbet



DPU AARHUS UNIVERSITET

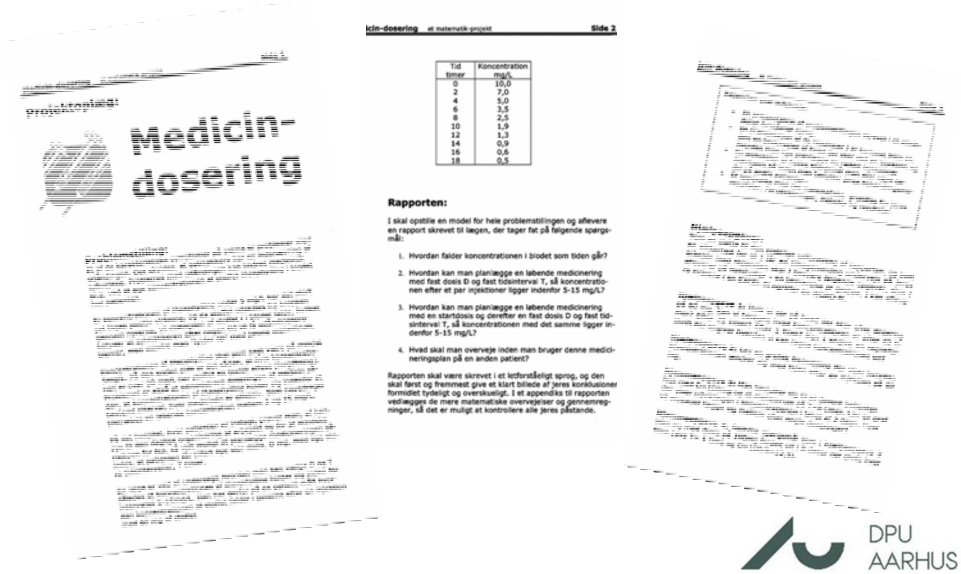
Eksempel 2: 100meter løbet



Eksempel 4

DPU AARHUS UNIVERSITET

Eks. 3: Astma-medicinering - modellering som middel og mål



Medicin-dosering

icin-dosering et matematik-projekt Side 2

Tid timer	Koncentration mg/L
0	10,0
2	7,0
4	5,0
6	3,5
8	2,5
10	1,9
12	1,3
14	0,9
16	0,6
18	0,5

Rapporten:

I skal opstille en model for hele problemstillingen og aflevere en rapport skrevet til lægen, der tager fat på følgende spørgsmål:

1. Hvordan falder koncentrationen i blodet som tiden går?
2. Hvordan kan man planlægge en løbende medicinering med fast dosis D og fast tidsinterval T, så koncentrationen efter et par injektioner ligger indenfor 5-15 mg/L?
3. Hvordan kan man planlægge en løbende medicinering med en startdosis og derefter en fast dosis D og fast tidsinterval T, så koncentrationen med det samme ligger indenfor 5-15 mg/L?
4. Hvad skal man overveje inden man bruger denne medicineringsplan på en anden patient?

Rapporten skal være skrevet i et letforståeligt sprog, og den skal først og fremmest give et klart billede af jeres konklusioner formidlet tydeligt og overskueligt. I et appendiks til rapporten vedlægges de mere matematiske overvejelser og gennemregninger, så det er muligt at kontrollere alle jeres påstande.

DPU AARHUS UNIVERSITET

Produktkrav og evaluering

Rapporten skal være skrevet i et letforståeligt sprog, og den skal først og fremmest give et klart billede af jeres konklusioner formidlet tydeligt og overskueligt. I skal lave et forslag til en medicineringsplan, der holder koncentrationen af theophyline mellem 5 og 15 mg/l for patienten.

I et appendiks til rapporten vedlægges de mere matematiske overvejelser og beregninger, så det er muligt at kontrollere alle jeres påstande.

Jeres projekt bliver evalueret på følgende elementer:

Er sproget i rapporten forståeligt og præsentationen af problemet og løsningerne præsenteret i en overskuelig form. Er teksten i selve rapporten skrevet til en ikke-matematiker. (Kommunikationskompetence)

Er der brugt grafer til at anskueliggøre problemerne og løsningen.

Er mellemregninger, matematiske overvejelser og forudsætninger klart formuleret i appendikset. Kan man se, hvordan I er kommet frem til jeres resultater.

DPU AARHUS UNIVERSITET

Vejledning og styring undervejs gennem dialog

E1: Vi kan se, at den falder hele tiden, men den falder mindre og mindre.

L: Hvaffor en?

E1: Øh … det må være koncentrationen af medicin.

L: Ja. Er der noget system?

E2: Ja, den falder til det halve hver fjerde time.

L: Ja. Den falder altså ikke med en fast størrelse, men hvad er det så der er fast?

E1: Det er det den falder… altså det vi ganger med.

E3: Det må være procenten …

L: Falder den også med en fast procent, hvis vi ser på spring på 2 timer?

E1: Den falder fra 10 til 7. Så der er altså 70% tilbage.

L: Ja og når vi skal finde 70%, hvad er det så vi ganger med for at finde det?

Tid timer	Koncentration mg/L
0	10,0
2	7,0
4	5,0
6	3,5
8	2,5
10	1,9
12	1,3
14	0,9
16	0,6
18	0,5

DPU
AARHUS UNIVERSITET

E1: Vi ganger med 0,7

L: Passer det at den fortsætter med at falde til 70%, når vi går videre?

E2: Hvis vi ganger 7 med 0,7 så får vi 4,9 og det passer ikke! Det skulle give 5.

E3: Det passer da fint. Det er jo næsten det samme! Det er bare afrundingsfejl.

L: Hvis den også falder med en fast procent hver time, hvor mange procent skulle det så være, når den falder med 30% på to timer.

E1: Det må være 15%

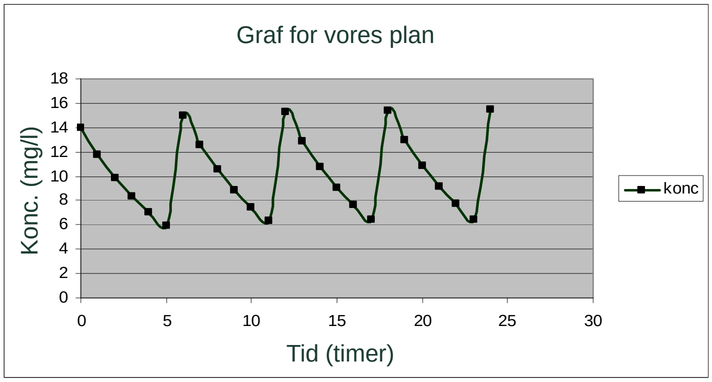
L: Prøv at se om det passer. Hvad skal man så gange med for at få koncentration en time efter?

………….

Efter nogen tid og forskellig grader af støtte fra læreren, når de fleste grupper frem til fremskrivningsfaktoren for 1 time: $\sqrt{\sqrt{0{,}5}} \approx 0{,}84$

$k(t+1) = (0{,}5)^{1/4}\, k(t)$; $k(0)=10$ mg/l

DPU
AARHUS UNIVERSITET



Med en startdosis på 84 mg og 60 mg hver 6. time derefter får vi denne graf. Koncentrationen svinger mellem 4,95 mg/l og 15,46 mg/l. Det er derfor en rigtig god idé at følge denne plan!

Hvis du skal behandle andre patienter må du have data for hver af dem. Hvis vi kan få rigtig mange data fra forskellige personer efter køn og vægt kan vi måske lave en bedre model.

DPU AARHUS UNIVERSITET

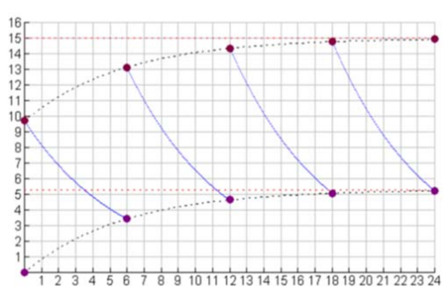
Matematisk analyse af modellen – evt. vha. af CAS

Den højeste dosis *D*, målt i mg/l kan bestemmes ud fra: $D = N(1-q^T)$

Ønsker vi at N skal ligge på 15mg/L så kan vi benytte T = 6 timer og det giver så:

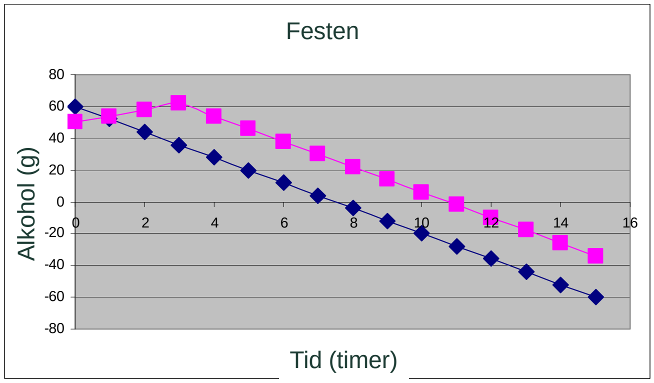
$$D = N(1-q^T) = 15 \cdot (1-0.5^{6/4}) = 9.70$$

Den maksimale dosis der kan gives med T=6 og N=15 er altså 6 x 9.70 = 58,8 mg



DPU AARHUS UNIVERSITET

3. Eksempel 4: Festen - alkoholindtag og –forbrænding



Figuren viser to kurver. Den mørke svarer til en startværdi på 60g (5 genstande) og den lyse til en startværdi på 48g (fire genstande) og derefter en genstand per time de næste tre timer.

DPU AARHUS UNIVERSITET

Kompartmentmodellering af dynamiske systemer

Brusebadet:

6 eller 0 l./min. → $V(t)$ [liter]; $V(0) = V_0 = 3$ l.

100m løbet:

$v(t)$ [m/sek.] → $S(t)$ [m]; $S(0) = 0$

Medicindosering:

$Ind(t)$ [mg/l] → $C(t)$ [mg/l]; $C(0) = C_0$ → $a\,C(t)$ [mg/l/time]

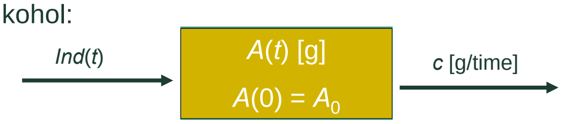
Hvis $Ind(t)$=0 fås: $C'(t) = -\,a\,C(t)$ => $C(t) = C_0\, e^{(-at)}$

DPU AARHUS UNIVERSITET

Kompartmentmodellering af dynamiske systemer

Eksempel 4:

For alkohol:



Hvis $Ind(t)=0$ og $A(0)=A_0$, så er $A(t) = A_0 - c\,t$
Det fås også af: $A'(t) = -c \Rightarrow A(t) = A_0 - c\,t$

Alkoholmodellen kan løses analytisk

Ved brug af "ind – ud princippet" fås:

$$Ind(t) = \begin{cases} 12\,g/time & for\,t \le 3 \\ 0\,g/time & for\,t > 3 \end{cases}$$

$$Ud(t) = -8\,g/time$$

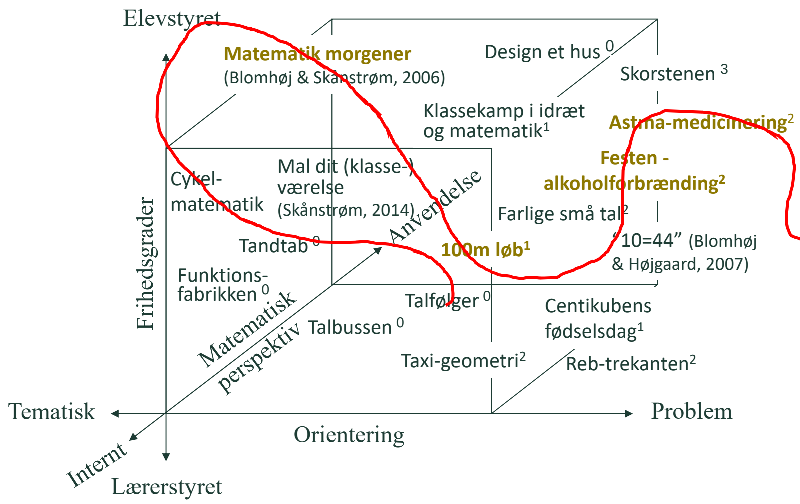
$$Ind(t) - Ud(t) = \begin{cases} 4\,g/time & for\ t \le 3 \\ -8\,g/time & for\ t > 3 \end{cases}$$

$$A(t) = \begin{cases} 4t + 48 & for\,t \le 3 \\ -8t + (48 + 3 \cdot 4) & for\,t > 3 \end{cases}$$

DPU
AARHUS UNIVERSITET

Et didaktisk mulighedsrum for UM

NC UM



Modellering af dynamiske systemer vha. kompartment-modellering og differenslignings / differentiallignings - systemer.
(Blomhøj, 2020);
(Blomhøj & Kjeldsen, 2018)

0) SUM 1) (Blomhøj, 2016) ; 2) (Artigue & Blomhøj, 2013); 3) (Blomhøj, 2020a)

DPU
AARHUS UNIVERSITET

Tre forskningsspørgsmål til UM

NC UM

1. Hvordan kan UM didaktiseres og hvilke matematikdidaktiske begrundelser og udfordringer knytter sig hertil på forskellige trin i uddannelsessystemet?
2. Hvilke potentialer rummer UM i forhold til at skabe motivation for, samt dybde, sammenhæng og progression i elevernes matematiklæring i de enkelte forløb såvel som i længere læringsforløb over flere år og i hele uddannelsesforløbet?

DPU
AARHUS UNIVERSITET

4. Samspil mellem forskning og udvikling af praksis i UM

I relation til forskningsspørgsmål 3:

Hvordan kan samspil mellem udvikling og udbredelse af UM og matematikdidaktisk forskning forstås teoretisk og styrkes i praksis?

er der oplagte muligheder for synergi med NCUM.

Afdækning af muligheder og vilkår for samspil er central for NCUM. Samtidig vil udviklingsprojekter i NCUM give gode muligheder for indsamling af empiri til forskning i dette samspil.

Kompeteceudvikling i faglige fælleskaber kan være en strategi for samspil og samtidig et forskningsfokus. (Cobb et al., 2013)

DPU AARHUS UNIVERSITET

Samspil mellem udvikling og forskning i UM

(a) UM i og med matematik: Eleverne arbejder med matematik i UM;

(b) UM i matematikundervisning: Lærere samarbejder med forskere om at igangsætte og undersøge didaktiske muligheder og udfordringer ved UM;

(c) UM i forskningen: Forskere udvikler viden (teori) om undervisning og læring i forskellige UM praksisser baseret på tæt samspil med lærere om udvikling af UM.

Min forskning i UM vil fortsat omfatte alle tre niveauer.

(Inspireret af Jaworski (2003, 2004), (Blomhøj, Haavold og Pedersen, 2020), (Blomhøj 2020b)

DPU AARHUS UNIVERSITET

Udvikling af undersøgende fællesskaber

Inden for et praksisfællesskab

Transformation

- Stil spørgsmål og søg svar
- Erkend problemer og søg løsninger
- Forundring, fantasi, opfind, udforsk …

} Undersøgende praksisfællesskab

Udvikling af en identitet som undersøgende praktiker:

UM som en didaktisk metode ⟷ Undersøgende tilgang som en værensform i praksis

(Inspireret af Jaworski (2003, 2004) og Wagner (1997))

DPU
AARHUS UNIVERSITET

Tak til lærere og kollegaer, som jeg har haft fornøjelse af at samarbejde med de seneste 30 år.

Jeg håber på fortsat samarbejde og på nyt spændende samarbejde i DPU og i regi af NCUM!

DPU
AARHUS UNIVERSITET

AARHUS
UNIVERSITET

Referencer

Alrø, H. & Skovsmose, O. (2002). *Dialogue and learning in mathematics education: Intention, reflection and critique*. Dordrecht: Kluwer.

Artigue, M. & Blomhøj, M. (2013). Conceptualising inquiry based education in mathematics. *ZDM The International Journal on Mathematics Education* 45 (6), 798-810.

Blomhøj, M., (2020). Characterising modelling competency in students' projects: Experiences from a natural science bachelor program. In G.A. Stillman et al. (Eds.) *Mathematical Modelling Education and Sense-making*, Springer Nature, 395-405.

Blomhøj, M. (2020a). Undersøgende matematikundervisning - fra teori til praksis. I Wahl, Michael and Weng, Peter (eds.) *Håndbog for matematikvejledere 2. udgave*. København: Dansk Psykologisk Forlag.

Blomhøj, M. (2020b – under review). Samspil mellem fagdidaktisk forskning og udvikling af matematikundervisning – belyst gennem erfaringer fra et udviklingsprojekt med undersøgende matematikundervisning. *Bidrag til antologi om sammenlignende fagdidaktik*. Red.: T. Christensen, P. Hobel, H. Mathiasen og M. K. Sillasen. SDU.

Blomhøj, M. (2016). *Fagdidaktik i matematik*. København: Frydenlund.

Blomhøj, M. (2013). Hvad er undersøgende matematikundervisning – og virker den? I Wahl, Michael and Weng, Peter (eds.) *Håndbog for matematikvejledere*. København: Dansk Psykologisk Forlag, 172-188.

Blomhøj, M. (2008). ICMI's challenges and future. In Menghini, M., Furinghetti, F., Giacardi, L. & Arzarello, F. (eds.) *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education.* Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana, 169-179.

Blomhøj, M. (2006). Konstruktion af episoder Konstruktion af episoder som forskningsmetode - udforskning af læringsmuligheder i IT-støttet matematikundervisning. I (Skovsmose og Blomhøj, 2006).

Blomhøj, M. (2003): IKT i skolens matematikundervisningen – vilkår eller mulighed. I O. Skovsmose og M. Blomhøj (red.) *Kan det virkelig passe?* København: L&R Uddannelse, 73-91.

Blomhøj, M. (2001). Villkor för lärande i en datorbaserad matematikundervisning - elevernes användning av avancerade matematikprogram. I Grevholm, B. (ed.) *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv*. Lund: Studentlitteratur, 185-217.

Blomhøj, M. & Haavold (2019). Coherence through inquiry based mathematics education. In Jankvist, U. T., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Veldhuis, M. (Eds.). (2019). Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11, February 6 – 10, 2019). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME, hal-02429769.

Blomhøj, M., Haavold, P.Ø., and Pedersen, I. (2020 – in review). Developing and researching inquiry based mathematics teaching in practice. In review for the special issue of *Nordic Studies in Mathematics Education* 2021.

Blomhøj, M. & Højgaard Jensen, T. (2007). What's all the fuss about competences? Experiences with using a competence perspective on mathematics education to develop the teaching of mathematical modelling. In W. Blum (red.) Modelling and applications in mathematics education, 45-56. The 14th ICMI-study 14. New York: Springer-Verlag.

Blomhøj, M. & Højgaard, T. (2007a). SOS-projektet – didaktisk modellering af et sammenhængsproblem. *MONA*, 3, s.25-53.

Blomhøj, M. & Kjeldsen, T. H. (2018). Interdisciplinary Problem Oriented Project Work: A learning Environment for Mathematical Modelling. In S. Schukajlow und W. Blum (Hrsg.), *Evaluierte Lernumgebungen zum Modellieren*. Münster: Springer, s. 11-29.

Blomhøj, M. & Kjeldsen, T.H. (2011). Students' Reflections in Mathematical Modelling Projects. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, G.Stillman (eds.) *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. International Perspectives on the Teaching and Learning*, Vol. 1. Springer, 385-396.

Blomhøj, M. & Kjeldsen, T.H. (2010). Learning mathematics through modelling – the case of the integral concept." In B. Sriraman, C. Bergsten, S. Goodchild, G. Pálsdóttir, B. Dahl and L. Haapasalo (eds.) *The first Sourcebook on Nordic Research in Mathematics Education*. Montana: Information Age Publishing, 569-582.

Blomhøj, M. & Kjeldsen, T.H. (2010a). Mathematical modelling as goal in mathematics education – developing of modelling competency through project work. In B. Sriraman, C. Bergsten, S. Goodchild, G. Pálsdóttir, B. Dahl and L. Haapasalo (eds.) *The first Sourcebook on Nordic Research in Mathematics Education*. Montana: Information Age Publishing, 555-567.

Blomhøj, M og Skånstrøm, M. (2006). Matematik Morgener – matematisk modellering i praksis. I O. Skovsmose og M. Blomhøj (red.) *Kunne det tænkes? – om matematiklæring*. København: Malling Beck, 7-23.

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics. Dordrecht: Kluwer.

Cobb, P., Jackson, K., Smith, T., Sorum, M., & Henrick, E. (2013). Design research with educational systems: Investigating and supporting improvements in the quality of mathematics teaching and learning at scale. *National Society for the Study of Education Yearbook*, 112(2), 320-349.

Dewey, J. (1933). *How we think: A restatement of the relation of reflective inquiry thinking to the educative process*. Boston, MA: Heath.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.

Gravemejier, K. (2007). Emergent modelling as a precursor to mathematical modelling. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Eds.) *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study* (pp. 137-144). New York: Springer.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning. J(2),* 155-177.

Gravemeijer, K. & Doorman, L.M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, 39 (1-3), 111-129.

Jankvist, U. T., & Misfeldt, M. (2015). CAS-induced difficulties in learning mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 35(1), 15-20.

Jankvist U. T., Misfeldt M. & Marcussen, A. (2016). The Didactical Contract Surrounding CAS when Changing Teachers in the Classroom. *Journal for Research in Mathematics Education* - REDIMAT, 5(3), 263-286.

Jaworski, B. (2003). Research practice into/influencing mathematics teaching and learning development: Towards a theoretical framework based on co-learning partnerships. *Educational studies in mathematics*, *54*(2-3), 249-282.

Jaworski, B. (2004). Grappling with complexity: co-learning in inquiry communities in mathematics teaching development. Plenary address at PME 28. In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 17-36).

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *The Journal of the learning sciences*, 16(4), 565-613.

Skovsmose, O. (2003). Undersøgelseslandskaber. Skovsmose, O. & Blomhøj, M. (red.). *Kan det virkelig passe? – om matematiklæring*. København: Malling Beck, 143-158.

Skovsmose, O. & Blomhøj, M. (2006) (red.). *Kunne det tænkes? – om matematiklæring*. København: Malling Beck.

Skånstrøm, M. & Blomhøj, M. (2016). Det kommer an på… I Rangnes, T.E. og Alrø, H (red.) Matematikklæring for Framtida. Caspar forlag.

Steinbring, H. (2005). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction: An epistemological perspective* (Vol. 38). Springer Science & Business Media.

Tall, D. & Vinner, S., 1981: Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Wagner, J. (1997). The unavoidable intervention of educational research: A framework for reconsidering research-practitioner cooperation. *Educational Researcher* 26(7), 13–22.