

Nr. 6 – November 2020 – 48. årgang.

MATEMATİK



NCUM – Nationalt Center for Udvikling af Matematikundervisning



Morten Blomhøj



Charlotte Krog Skott

Af Morten Blomhøj, Aarhus Universitet, Blomhoej@edu.au.dk
og Charlotte Krog Skott, NCUM, Københavns Professionshøjskole, CKSK@kp.dk

I artiklen fortæller vi om NCUMs vision, organisering og hovedopgaver. Og vi giver en lille smagsprøve – inden for emnet lineære funktioner – på NCUMs formidling af matematikdidaktisk forskning til brug for udvikling af undervisningspraksis.

Så lykkedes det at få etableret et center i Danmark, der på et forskningsmæssigt grundlag skal understøtte udvikling af matematikundervisning og -læring i det almene skolesystem. Med en bevilling fra Børne- og Undervisningsministeriet og Forsknings- og Uddannelsesministeriet på i alt 25 millioner kr. blev NCUM etableret i januar 2020. Bevillingen løber til og med 2023, men sigtet er, at NCUM fortsætter.

NCUM er sat i verden for at skabe samspil mellem matematikdidaktisk forskning og udvikling af praksis i dagtilbud og i undervisning. En forudsætning herfor er, at pædagoger og matematiklærere kommer til at kende NCUM. Derfor er vi glade for lejligheden til at skrive om NCUM i dette nummer af *Tidsskriftet Matematik*. Specielt vil vi gerne gøre vores akronym, NCUM, kendt med en udtale som NSUM – med et stemt s. Vi vil gerne fremhæve, at

sum som begreb og *at summere* som proces er grundlæggende i matematik. Det starter med, at små børn tæller og lægger sammen, og fortsætter med, at summering af variable størrelser bliver centralt i opbygningen af matematisk teori. Vi vil også gerne signalere, at det er gennem den kumulerede virkning af centrets aktiviteter og projekter på forskellige trin i uddannelsessystemet og i et langsigtet perspektiv, at NCUM kan forventes at bidrage til udvikling af praksis i dagtilbud og matematikundervisning og dermed til at forbedre børn og unges matematiklæring.

Vi fortæller her kort om centrets baggrund og vision, og til sidst giver vi et eksempel på NCUMs formidling. Det handler om, hvordan matematikdidaktisk teori kan give grundlag for, at vi kan styrke elevernes begrebsforståelse inden for emnet lineære funktioner.

Baggrunden for etablering af NCUM

NCUM er resultatet af en længerevarende græs-
rodsindsats. Allerede i 2006 blev det anbefalet den daværende undervisningsminister Bertel Haarder at oprette et nationalt videnscenter for matematikdidaktik. Det skete, da et bredt sammensat ministerielt udvalg under ledelse af Mogens Niss (professor i matematikkens didaktik ved Roskilde Universitet) udarbejdede en rapport om fremtidens matematikundervisning i grundskolen. Her blev det anført, at der i Danmark var behov for at styrke den matematikdidaktiske forskning og navnlig dens forbindelse til udvikling af matematikundervisningens praksis (UVM, 2006). Som opfølgning herpå blev Nationalt Videnscenter for Matematikdidaktik (Navimat) oprettet i 2008 under ledelse af Mette Andresen, Professionshøjskolen København, på en bevilling fra Børne- og Undervisningsministeriet og i et samarbejde mellem alle professionshøjskolerne. Navimat blev imidlertid ikke videreført efter 2010, hvor bevillingen ophørte. Siden dengang har der i de matematikdidaktiske miljøer været arbejdet på at skaffe politisk opbakning til etablering af et nationalt center for matematikdidaktik. Fra september 2016 har indsatsen været koordineret og drevet af en initiativgruppe med bred repræsentation fra matematiklærerforeningerne og fra de matematikdidaktiske forskningsmiljøer, se figur 1, og denne indsats bar frugt med oprettelsen af NCUM.

Morten Blomhøj (formand, RUC)	Claus Michelsen (SDU)	Aalborg Universitet (AAU);
Anette Søndergaard (DMN)	Elsebet Petersen (UVM)	Aarhus Universitet (AU);
Bent Lindhardt (PHA)	Gert B. Nielsen	Danmarks Institut for Pædagogik og Uddannelse (DPU);
Carl Winsløw (KU, IND)	(DMLF, Forlaget Matematik)	Danmarks Matematiklærerforening (DMLF);
Charlotte Krog Skott (KP)	Morten Misfeldt (AAU)	Danmarks Matematikvejledernetværk (DMN);
Christina Cæsarsen (LMFK)	Uffe Jankvist (AU, DPU)	Institut for Naturfagernes Didaktik (IND);
		Københavns Professionshøjskole (KP);
		Københavns Universitet (KU);
		Matematiklærerforening (LMFK);
		Professionshøjskolen Absalon (PHA);
		Roskilde Universitet (RUC);
		Syddansk Universitet (SDU);
		Undervisningsministeriet (UVM).

Figur 1. Initiativgruppen for oprettelse af et matematikdidaktisk center 2016-2018.

NCUMs organisering og vision

Centrets sekretariat har til huse på DPU i Emdrup og består af en leder, Morten Blomhøj, og en viceleder, Charlotte Krog Skott (begge med halv tid i NCUM), en kommunikations-

og web-ansvarlig, Ditte Wolff-Jacobsen, og en aktivitetsansvarlig, Tina Hudlebusch.

NCUMs virksomhed omfatter matematiklæring og -undervisning i de fire søjler: dag- og fritidstilbud, grundskole, gymnasiale uddannelser og erhvervsuddannelser. Svarende hertil er der dannet 5 ekspertgrupper – en for hver af søjlerne og en gruppe på tværs af dem – med 3 til 5 matematikdidaktiske forskere og praktikere i hver gruppe. Derudover er NCUM i proces med at finde netværkskoordinatorer for hver af de fire søjler. Disse – i alt omkring 30 ressourcepersoner – er frikøbt fra deres hovedstilling til at arbejde for NCUM i et omfang svarende til 1-1½ måneds arbejde om året.

NCUMs organisering med oversigt over ekspertgrupperne og netværkskoordinatorer findes på NCUM.dk

Ved NCUMs åbningskonference, der blev afholdt digitalt den 2. oktober 2020 med omkring 220 deltagere og medvirkende, blev centrets vision præsenteret. På NCUM.dk findes videolinks til de enkelte oplæg på konferencen og de tilhørende præsentationer. NCUMs overordnede vision er at bidrage til:

En engagerende, ambitiøs og tidssvarende matematikundervisning i en kultur, der samarbejder om udvikling af praksis fra dagtilbud til ungdomsuddannelse.

Visionen er udmøntet ift. hver af de fire søjler og den tværgående indsats.

NCUMs tre hovedopgaver er, at:

- formidle matematikdidaktisk viden til pædagoger og lærere i de fire søjler, som kan danne grundlag for refleksion over og udvikling af praksis.
 - understøtte eksisterende netværk og skabe nye netværk for pædagoger og lærere med fokus på udvikling af praksis.
 - søge finansiering til og drive udviklings- og forskningsprojekter, der kan bidrage til samspil mellem forskning og udvikling af praksis inden for og på tværs af de fire søjler.
- I forhold til netværk på grundskoleområdet så

udgør Danmarks Matematikvejleder Netværk (DMN) og Danmarks Matematiklærerforening (DMF) veletablerede og stærke faglige netværk, som det er naturligt og vigtigt for NCUM at samarbejde med. Derfor har vi engageret Bent Lindhardt, Professionshøjskolen Absalon, som NCUMs netværkskoordinator for grundskoleområdet. Bent er allerede koordinator for DMN. Der er også indgået aftale om, at NCUM finansierer administrationen af DMN og støtter det regionale arbejdet i DMN. Kontakt til og samarbejde med DMF sikres gennem DMNs årlige konference og via kontakt mellem NCUMs ledelse og DMFs hovedstyrelse.

Samspil mellem forskning og udvikling af praksis

Omdrejningspunktet for NCUMs virksomhed er samspil mellem matematikdidaktisk forskning og udvikling af praksis i og på tværs af de fire søjler. Internationalt og nationalt har matematikdidaktisk forskning udviklet og afprøvet teorier, tilgange og metoder, som er relevante for at forstå og imødegå en række af de udfordringer, vi ser i praksis. Forskningen kan imidlertid ikke levere grydeklare løsninger, der direkte kan anvendes i praksis. Den kan give et grundlag for at reflektere over praksis og inspirere til udvikling af praksis, og den kan give hele eller delvise forklaringer på fx elevers vanskeligheder med at lære bestemte matematiske begreber og procedurer. For at forskningens resultater kan bruges af lærere og pædagoger til udvikling af praksis, er det typisk nødvendigt, at der etableres længerevarende samarbejder mellem pædagoger og lærere og matematikdidaktikere. NCUM skal netop derfor arbejde på at udvikle og gennemføre projekter, der rummer mulighed for denne form for samarbejde. Samtidig er det vigtigt, for at sådanne udviklings- og forskningsprojekter kan få blivende effekt, at de forankres lokalt i skoler og kommuner, og at erfaringer og resultater fra projekterne spredes via faglige netværk. NCUMs digitale platform bliver den primære kanal for centrets formidling af forskningsbaseret viden om aktuelle og påtrængende problemstillinger i matematikundervisningens praksis. Det er ekspertgruppernes primære arbejdsopgaver at producere forskningsbaseret formidling til platformen. Blandt emner, der aktuelt arbejdes med i NCUM, og som har særlig relevans

for grundskolen, kan nævnes: tidlig algebra, undersøgende matematikundervisning, funktionsbegrebet ved overgangen til gymnasiet og lektionsstudier som format til udvikling af praksis.

Smagsprøve på NCUMs formidling: Lineære funktioner på mellem- og sluttrin

Som eksempel på hvordan matematikdidaktisk forskning kan bidrage til udvikling af undervisningspraksis, giver vi her en lille smagsprøve på en formidling om emnet lineære funktioner på mellem- og sluttrin. Det er sigtet at udvikle formidlingen til NCUMs digitale platformen i løbet af 2021.

Det bærende spørgsmål for smagsprøven er: *Hvordan kan jeg, som matematiklærer, forankre og styrke elevers forståelse af lineære funktioner?*

Smagsprøven er bygget op, så den forskningsmæssige scene præsenteres først med fokus på funktioner som et centralt, men vanskeligt begreb at lære. Dernæst præsenteres et aktivitetseksempel, der kan imødekomme nogle af de forhold, som forskningen peger på som særlig vigtige.

Funktioner – et centralt matematisk begreb

Funktionsbegrebet er et af de matematiske emner, der er forsket og forskes mest i (Thompson & Carlson, 2017). Det er der flere grunde til. En grund er, at funktioner er et centralt matematisk begreb, der er afgørende for læring og anvendelse af matematik på både grundskolens mellem- og sluttrin samt gymnasialt niveau, hvor det indgår i grundlaget for differential- og integralregning. Desuden anvendes funktioner, ikke mindst lineære funktioner, udbredt i andre fag og praksisområder. En rodfæstet forståelse af funktionsbegrebet er derfor en forudsætning for en matematikbaseret videregående uddannelse og for mange erhverv.

En anden grund er, at mange elever har svært ved at forstå funktioner, også lineære, og navnlig at bruge dem i forbindelse med problembehandling og modellering. Det ses på de ældste klassetrin, men særlig markant ses det ved

starten på den gymnasiale matematikundervisning. Det er bl.a. derfor, at lineære funktioner er udvalgt som fokus i gymnasiets grundforløb (se rapport om grundforløbet på emu.dk).

En tredje grund er, at flere principielle vanskeligheder ved læring af matematiske begreber træder tydeligt frem ved introduktion af funktionsbegrebet. Her møder elever første gang formalisering af sammenhængen mellem to variable, hvor det især er brugen af algebra i form af ligninger med to variable, som volder vanskeligheder. Men der er i det hele taget udfordringer i arbejdet med og samspillet mellem de forskellige repræsentationsformer for funktioner, såsom sprog, tabel, algebra, graf og algoritme/program.

Hvorfor er det vanskeligt at forstå funktioner?

Det er en generel erkendelsesteoretisk udfordring ved læring af matematiske begreber, at vi kun har adgang til begreberne via repræsentationer af dem. Matematiske begreber er ikke en del af vores omverden i form af konkrete materielle objekter. Oftest ses de som kulturelt udviklede objekter og mentale konstruktioner. Dette forhold er grundigt belyst i matematikdidaktisk forskning, bl.a. af den tyske matematikdidaktiker Steinbring (se fx Steinbring, 2005). Steinbring har videreudviklet en såkaldt erkendelsesteoretisk trekant, der er udspændt af repræsentation, objekt og begreb. Repræsentation er en symbolsk repræsentation af begrebet i et notationssystem, fx algebra, tabel, graf, mens objekt henviser til en anvendelse af begrebet. Pointen er, at det er via relationerne mellem objektet og forskellige repræsentationer, at eleverne kan få fat i begrebets betydninger. Og problemet er, at der i undervisning ofte ikke bliver etableret et selvstændigt objekt, som eleverne kan forholde sig til, og som repræsentationerne af begrebet kan henvise til. Dette gælder særligt ift. lineære funktioner i både grundskolen og gymnasiet, hvor de objekter, der arbejdes med, ofte bliver identiske med deres algebraiske repræsentationer, dvs. $f(x) = ax+b$ for en lineær funktion og ligningen $y = ax+b$ for en ret linje. Som lærer er det naturligt at fokusere opmærksomheden på de algebraiske repræsentationer, fordi de er bærende

for fremstillingen i lærebøgerne, og fordi mange elever i særlig grad oplever vanskeligheder med denne repræsentationsform. Imidlertid peger Steinbring på, at algebraiske repræsentationer først bliver meningsfulde for elever, når de anvendes til at beskrive og undersøge objekter, der indgår i anvendelsessammenhænge eller andre kontekster, som er meningsfulde for elever. Det kan fx ske gennem et arbejde med matematisk modellering, hvor udgangspunktet er fænomener og problemstilling (objekt), som eleverne kan beskrive og undersøge ved hjælp af lineære funktioner. Her kan de algebraiske repræsentationer få mening og vise deres styrke for eleverne, samtidig med at eleverne i denne proces kan udvikle deres forståelse af lineære funktioner som begreb. Her er der altså tale om at bruge modellering som didaktisk middel til at styrke elevernes begrebsforståelse. Aktiviteten *Morgenbrusebadet* (se nedenfor) er et eksempel herpå. Figur 3 udfolder, hvordan forskellige repræsentationsformer kan belyse forskellige aspekter af begrebet lineær funktion både ift. eksemplet og generelt.

En model for dannelse af matematiske begreber

Ved læring af matematiske begreber spiller dualiteten mellem at forstå et begreb som henholdsvis en proces og et objekt ofte en afgørende rolle. Dette gælder ikke mindst for funktionsbegrebet. Der er udviklet forskellige teorier for og modeller af, hvordan en sådan begrebsudvikling kan foregå. Her eksemplificerer vi en model udviklet af Anna Sfard (1991) med fokus på dannelse af et funktionsbegreb. Modellen består af tre faser. I den første fase (kaldet *interiorization*) internaliserer eleven en proces, som udføres på allerede velkendte objekter (fx heltal). Det kan fx være, at eleven kender de første par af talværdier af to variable og skal bestemme de næste værdier af den ene ud fra værdier af den anden. Efterhånden kan eleven tale om processen uden at udføre den konkret. Eleven kan således se for sig, at man kan finde disse sammenhørende værdier, og at man kan repræsentere resultatet i en tabel eller som en graf. I anden fase (*condensation*) kondenserer eleven processen til et mere kompakt og samlet hele og kan her arbejde med forskellige repræsentationer af denne sammen-

hæng. I tredje fase (*reification*), hvortil det kræver et kognitivt spring at nå, kan eleven opfatte denne nye helhed som et selvstændigt objekt. Eleven ser nu funktioner som et objekt med bestemte egenskaber, der kan indgå i nye processer, som fx regning med funktioner. Uden den sidste krævende fase vil eleven alene kunne udføre operationerne.

En fuldt udviklet begrebsforståelse indebærer, at eleven fleksibelt kan skifte mellem en proces- og objektforståelse af en funktion. Sfards model for begrebsdannelse kan kombineres med Steinbrings betoning af betydningen af repræsentationsformer. Det har vi gjort for lineære funktioner i figur 3.

Modellering som middel til at udvikle elevernes begrebsforståelse

Udover at afdække vanskeligheder ved elevers læring af funktionsbegrebet og at udvikle modeller herfor så har matematikdidaktisk forskning også undersøgt og udviklet teorier, der belyser mulighederne for og styrkerne ved at forankre elevernes begrebsforståelse i deres erfaringsverden og i konkrete oplevelser (altså det Steinbring kalder objekter) med matematisk modellering. Det gælder bl.a. den hollandske skole *Realistic Mathematics Education* (RME). I RME arbejder elever i første omgang med at udvikle matematiske beskrivelser af velkendte ikke-matematiske fænomener, fx ved at udvikle en beskrivelse af et konkret fænomen som fx antal lommepenge, vha. en lineær funktion med konkrete værdier. Derved udvikler elever *modeller af* konkrete fænomener gennem en såkaldt *horisontal matematisering*. I anden omgang kan eleverne så gradvist ændre perspektiv ved at arbejde med modellerne inden for matematikken. Herved løsrives modellerne fra de konkrete situationer og kan bruges til at beskrive en bredere klasse af situationer, som fx fænomener med konstant vækst. Igennem en sådan *vertical matematisering* bliver de oprindelige *modeller af* et konkret fænomen til *modeller for* en klasse af sådanne fænomener. Via disse to former for matematisering kan eleverne udvikle solide forståelser af de involverede matematiske begreber (Gravemeijer, 2007, 1999).

Morgenbrusebadet, som vist i figur 2, er et eksempel på, hvordan en dagligdagssituation kan beskrives og analyseres ved hjælp af matematisk modellering og give anledning til en konkret lineær funktion. Eksemplet stammer fra forløbet MatematikMorgener (Blomhøj & Skånstrøm, 2006). Det har siden været anvendt i en række forsknings-og udviklingsprojekter.

I dette eksempel kan elever i fx 8. klasse arbejde med at opstille en *model af* vandforbruget ved brusebad via horisontal matematisering. Det kan de gøre ved at beskrive deres eget morgenbrusebad med måling af det kolde startforbrug og af vandstrømmen, når der er skruet op for vandet. De kan starte med at repræsentere vandforbruget i en tabel fx i et regneark, hvor der minut for minut beregnes, hvor mange liter vand der er brugt. Regnearket bliver herved en femte repræsentationsform ift. figur 3, som integrerer et regneudtryk og en tabel (evt. en graf), og som kan gøres dynamisk ift. ændringer af startforbrug og vandstrømmen.

Ud fra tabellen kan eleverne konstruere en grafisk repræsentation af vandforbruget som funktion af badetiden t (den stiplede linje i figur 2). I princippet er t kontinuert, da man jo kan slukke for bruseren, hvornår det skal være. Man kan tilnærme dette i tabellen/regnearket ved at indføre en ny parameter, så den næste tidsværdi beregnes ved $t+\Delta t$, således at et lille Δt kan få tidsværdierne til at ligge vilkårligt tæt. Den trinvis beregning af vandforbruget skal så ændres tilsvarende til $V+6\Delta t$. Herved kan grafen – i princippet – blive til et fuldt optrukket linjestykke. Som model af brusebadets vandforbrug er funktionen kun relevant i et begrænset tidsinterval fx $[0,10]$ minutter. Som en dreng bemærkede: "Så lang tid bader jeg ikke – efter 5 minutter er der ikke mere varmt vand, når jeg kommer efter min store søster!".

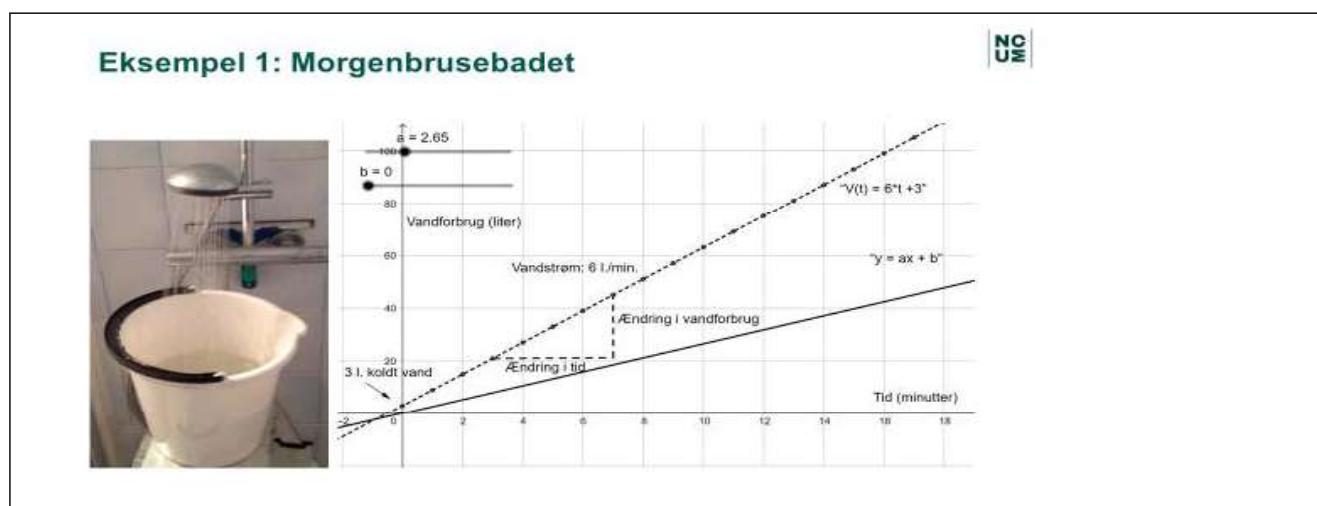
Som *model af* vandforbruget giver eksemplet mulighed for, at eleverne arbejder med fem forskellige repræsentationsformer af dette forbrug. Hvad angår den sproglige repræsentation kan eleverne beskrive deres normale brusebad i forhold til badetid og hårvask m.v. Der opstår typisk spørgsmål om, hvad der sker, hvis man slukker for vandet under hårvask. Mange elever udvikler selv en numerisk beskrivelse af den trinvis udvikling, som de med forskellig grad af støtte kan omsætte til en formel i et regneark.

Når der i regnearket er lavet en tabel og tegnet en graf for vandforbruget over tid, kan eleverne udfordres til at beskrive sammenhængen mellem de to variable algebraisk. Ud fra elevernes arbejde kan deres forslag til funktionsudtryk drøftes i klassen for at støtte deres opfattelse af en funktion for vandforbruget som et matematisk objekt jf. Sfards model. Den algebraiske repræsentation sammenfatter jo, hvad de har fundet ud af, og egner sig godt til kommunikation derhjemme om, hvad sammenhængen er mellem badetid og vandforbrug.

Ved at sammenligne deres *modeller af* deres vandforbrug kan eleverne erfare, at flere forskellige modeller kan bruges til at beskrive det samme fænomen. Her bliver det vigtigt at drage deres opmærksomhed mod ligheder mellem deres modeller, karakteristika ved fænomenet og ikke mindst sammenhænge mellem modeller og fænomen. På den måde kan eleverne støttes til at indse, hvilke dele af modellen der beskriver hvilke dele af fænomenet, og til at frigøre sig fra selve brusebadssituationen. Herved får de grundlag for at tale om og at forstå $y = ax + b$ som *model for* denne type af vækstfænomener. Dette kan evt. understøttes af mindre tilsvarende modelleringsarbejder. Via vertikal matematisering kan eleverne dernæst undersøge betydningen af a og b i den grafiske repræsentation i fx GeoGebra og dermed erfare, at a beskriver hældningen af den rette linje og b skæring med y-aksen, og at der er en entydig sammenhæng mellem en given ret linje og et sæt af værdier for a og b . Herved kan de udvikle deres forståelse af lineære funktioner som et objekt med bestemte egenskaber.

Ud fra *modeller af* vandforbruget kan der knyttes an til andre typer af funktioner og deres egenskaber. Man kan fx bede eleverne overveje, hvad der sker, hvis man skruer ned/op for vandet eller skifter til en sparebruser. Som en elev bemærkede: "Jeg kan skrue op og ned for hældningskoefficienten under badet, men så passer beregningen ikke mere". Dette kan give anledning til at arbejde med stykvis lineære funktioner ved fx at udfordre eleverne til at konstruere grafer for og lave beregninger af vandforbruget, hvor der slukkes for vandet under hårvask og måske igen ved brug af hårbalsam. Eleverne kan endvidere arbejde med at bestemme det samlede vandforbrug, når de vasker hår eller bruger balsam ud fra grafer, der viser vandstrømmen som funktion af badetiden. Herved skabes grundlag for, at *modeller af* vandforbruget også kan understøtte elevernes begyndende forståelse af integration.

Vi fremhæver brusebadet som en eksemplarisk aktivitet af tre grunde. For det første giver den mulighed for, at elever kan lave *modeller af* et konkret, velkendt og ikke-matematisk fænomen, som de senere kan generalisere til *modeller for* tilsvarende typer af fænomener. Dette arbejde involverer elever i de to vigtige processer: vertikal og horisontal matematisering. For det andet giver aktiviteten mulighed for, at elever kan udvikle en bred forståelse af lineære funktioner som begreb, fordi de kan arbejde med relationerne mellem objektet (altså vandforbruget ved et brusebad) og forskellige repræsentationer af forbruget, jf. Steinbrings erkendelsesteoretiske trekant. For det tredje kan

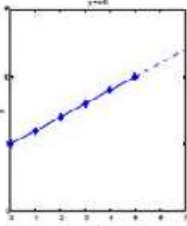
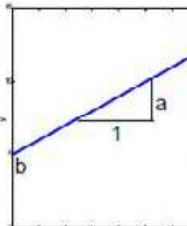


Figur 2. Fra model af morgenbrusebadet til model for lineære vækst fænomener.

elever støttes til at gå fra at regne på vandforbruget og lave beskrivelser af det til at tænke på vandforbrugsfunktionen som et objekt, der kan repræsenteres på forskellige måder og indgå i andre processer. Aktiviteten kan altså, ifølge Sfard, støtte elever i at udvikle en dualitetsfor-

ståelse af den lineære funktion som både en proces og et objekt, jf. figur 3.

Vi glæder os til at kunne præsentere færdigt udviklede formidlinger på NCUMs digital platform i begyndelsen af 2021.

Repræsentationsform	Sproglig	Numerisk	Algebraisk	Grafisk
Proces Model af vandforbrug Model for lineær vækst	Jeg bruger 3 l. til start og 6 l. for hvert minut Ud fra en startværdi, der er ikke behøver at være for $x=0$, er tilvæksten i den afhængige variabel bestemt ved en konstant gange tilvæksten i den uafhængige variabel.	t 0 1 2 3 V 3 9 15 21 +6 +6 +6 Eller V fås ved at gange t med 6 og lægge 3 til. y er funktion af x og $y=f(x)$ fås ved at indsætte en x -værdi.	$V(t_1)=6t_1 + 3$ $V(t+1)=V(t)+6;$ $V(0)=3$ $f(x) = ax + b$ $f(x_0)=y_0$ $f(x+\Delta x) = f(x) + a\Delta x$	Ud fra (0,3) afsættes næste punkt ved at gå 1 frem og 6 op. 
Objekt Model af vandforbrug Model for lineær vækst	Badetiden bestemmer vandforbruget. Det er flowet i l/min. gange med tiden plus det kolde startforbrug. En lineær funktion evt. som en sum af en konstant funktion og en ligefrem proportionalitet.	t 0 1 2 3 V 3 9 15 21 Funktionstabel som en entydig sammenkædning af en uafhængig med en afhængig variabel.	$V(t) = 6t + 3$ $f(x) = ax + b$ $g(x) = kx; h(x)=c$ $f(x) = g(x) + h(x)$	Grafen består af punkter $(t, V(t))$. 

Figur 3. Skema over repræsentationer af proces- og objektaspekter af hhv. funktionen for vandforbruget ved morgenbrusebadet og generelt af lineære vækstfænomener.

Referencer:

- Blomhøj, M & Skånstrøm, M. (2006). Matematik Morgener – matematisk modellering i praksis. I O. Skovsmose og M. Blomhøj (red.) *Kunne det tænkes? – om matematiklæring*. København: Malling Beck, 7-23.
- Gravemeijer, K. (2007). Emergent modelling as a precursor to mathematical modelling. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (eds.) *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study* (pp. 137-144). New York: Springer.
- Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, (2), 155-177.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Steinbring, H. (2005). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction: An epistemological perspective* (Vol. 38). Springer Science & Business Media.
- Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education*, 421-456. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- UVM (2006). Fremtidens matematik i folkeskolen. *Rapport fra udvalget til forberedelse af en handlingsplan for matematik i folkeskolen*. Undervisningsministeriet.