

Algebra-måndag

Oplæg om brug af detektionstestopgaver mv., bl.a. i gymnasial matematikundervisning i det svenske fængselssystem og i projektet Algebra-måndag

Linda Ahl & Ola Helenius 2026-05-21

Linda Marie Ahl

- ❖ Leg matematiklärare med 20 års erfarenhet från högstadiet och gymnasiet och kriminalvårdens vuxenutbildning
- ❖ Fil Licentiat med inriktning mot stöd från läromedel
- ❖ Fil Doktor med inriktning individualiserad undervisning i matematik
- ❖ Gruppledare för gruppen för: Implementering av forskningsresultat, i den Europeiska matematikdidaktikkongressen CERME
- ❖ MUSK - skriftlig matematisk kommunikation
- ❖ **Algebramåndag:** Samarbete med Skara kommun, Varbergs kommun, Sigtuna kommun, Halmstads kommun och Norrköpings kommun
- ❖ MAW & FISPI



Ola Helenius

- ❖ Professor i matematikdidaktik
- ❖ Doktor i abstrakt algebra och multiplikativ talteori
- ❖ Arbetat med TRR sedan 2010 (16 kommuner, över 1000 lärare)
- ❖ En av konstruktörerna av matematiklyftet
- ❖ Expert i regeringens läroplansutredning
- ❖ Skriver nytt kursplaneförslag i matematik
- ❖ MUSK - skriftlig matematisk kommunikation
- ❖ **Algebramåndag:** Samarbete med Skara kommun, Varbergs kommun, Sigtuna kommun, Halmstads kommun och Norrköpings kommun
- ❖ MAW & FISPI



57 Spørgsmål fra Professorens

Ved Mogens Niss & Uffe Thomas Jankvist

1. Giv et andet udtryk for $1\frac{1}{2}$:
2. Giv et andet udtryk for $3\frac{2}{3}$:
3. Betyder a^2 det samme som $2a$? Ja: Nej: Kan ikke svare:
4. Er $3a = a^3$? Ja: Nej: Kan ikke svare:
5. Betyder $4b$ det samme som $4 + b$? Ja: Nej: Kan ikke svare:
6. Hvad er $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}$? (Hvor hverken a eller b er 0.)
7. Er tallet $-a$ positivt eller negativt, eller kan det ikke afgøres?
Positivt: Negativt: Kan ikke afgøres:
8. Hvor meget er 110% af 85?
9. En vare koster inklusive 25% moms 150 kr. Hvor stor en procentdel af de 150 kr. udgør momsen?
10. Hvad er $\frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}$?

Test av begrepp som elever förväntas kunna när de börjar gymnasiet

Men dessa begrepp kan eleverna i allmänhet inte...

16. Hvad er $\frac{a^5}{a^5}$? (Hvor a ikke er 0.)

17. Findes der nogen værdier af a , således at $a^2 = 2a$? Ja: Nej: Kan ikke svare:

18. Findes der nogen værdier af b , således at $4b = 4 + b$? Ja: Nej: Kan ikke svare:

19. Om tallene k og s ved vi, at $\frac{4}{5} \cdot k = s$. Isolér k :

20. Hvad er løsningen/løsningerne til ligningen $3x - x = 2x$?

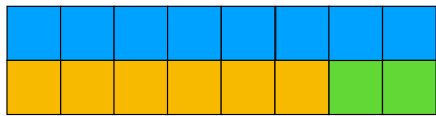
21. Hvad kan du sige om de to tal c og d når: $7c + 22 = 109$ og $7d + 22 = 109$?

22. Hvad kan du med ord sige om sammenhængen mellem x og y når $y = x + 5$?

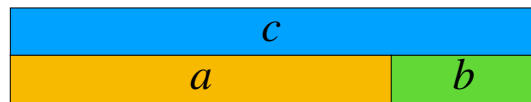
23. Er $f(x) = x^2 - x$ og $g(x) = x(x - 1)$ lig hinanden eller er de forskellige? Lig hinanden: Forskellige:

Hvad mener vi, når vi siger algebra?

Algebra som struktur



$$6 + 2 = 8 \quad 6 = 8 - 2 \quad 2 = 8 - 6$$



$$a + b = c \quad a = c - b \quad b = c - a$$

Algebra som funktionel tænkning

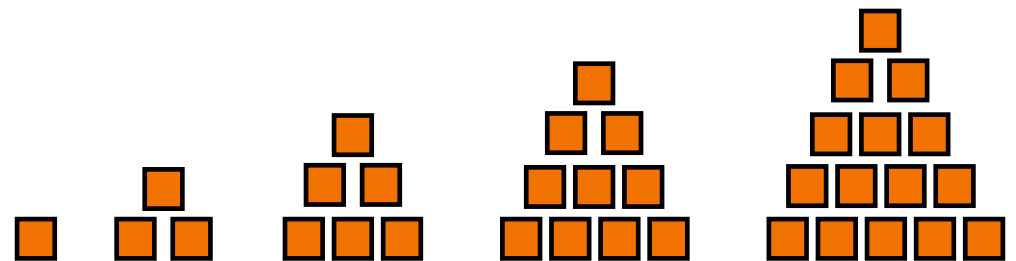
$$s(t) = 100t$$

Algebra som operationer på ikke-numeriske symboler

$$6 + _ = 8 + 2$$

$$7x - 3 = 13x + 15$$

Algebra som (geometriske) mønstre



$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{12}{3} \longrightarrow x = \frac{12}{3}$$

$$ax = b \longrightarrow x = \frac{b}{a}$$

$$0.3x = 0.12 \longrightarrow x = \frac{0.12}{0.3}$$

$$0.67x = 0.045 \longrightarrow ?$$

Jag vill ta bort den här nollan

$$\frac{3}{3} = 0$$
$$\frac{a^5}{a^5} = 0$$

Er algebra virkelig så vigtigt?

Algebra lærer eleverne at se mønstre, sammenhænge og strukturer i matematik.

$$3 \cdot 5 = 15$$

$$5 = \frac{15}{3}$$

$$3 = \frac{15}{5}$$

$$a \cdot b = c$$

$$b = \frac{c}{a}$$

$$a = \frac{c}{b}$$

$$1,003 \cdot 0,98 = 0,98294$$

$$0,98 = \frac{0,98294}{1,003}$$

$$1,003 = \frac{0,98294}{0,98}$$

45% i år 8

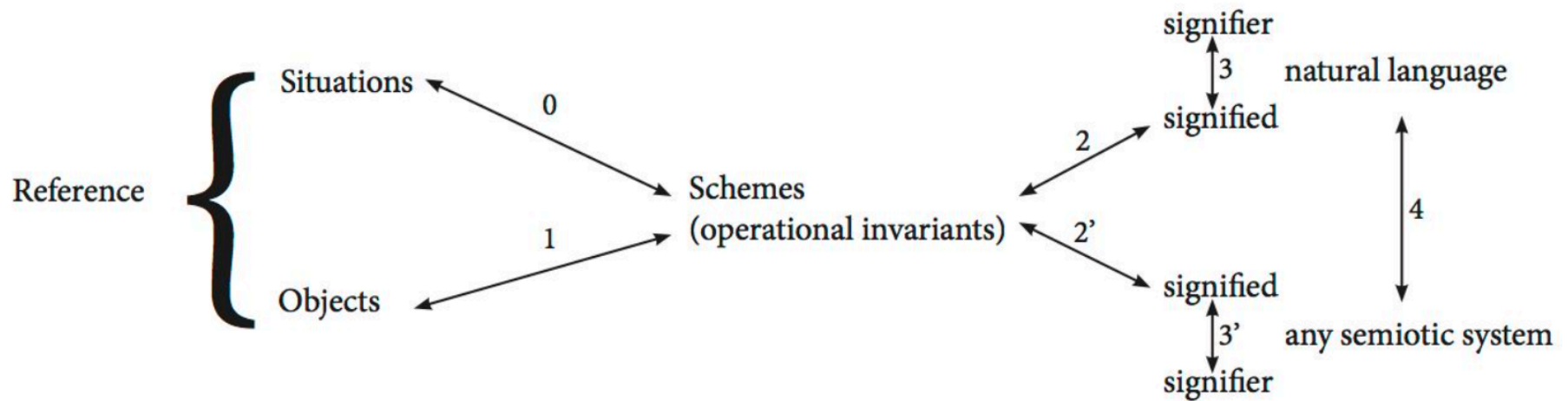
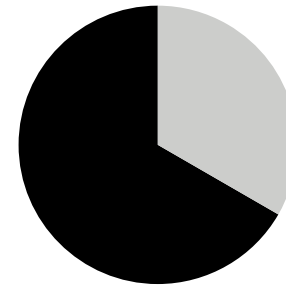


Figure 1: Vergnaud's development of the classical semiotic triangle. Adapted from Vergnaud (1998b).

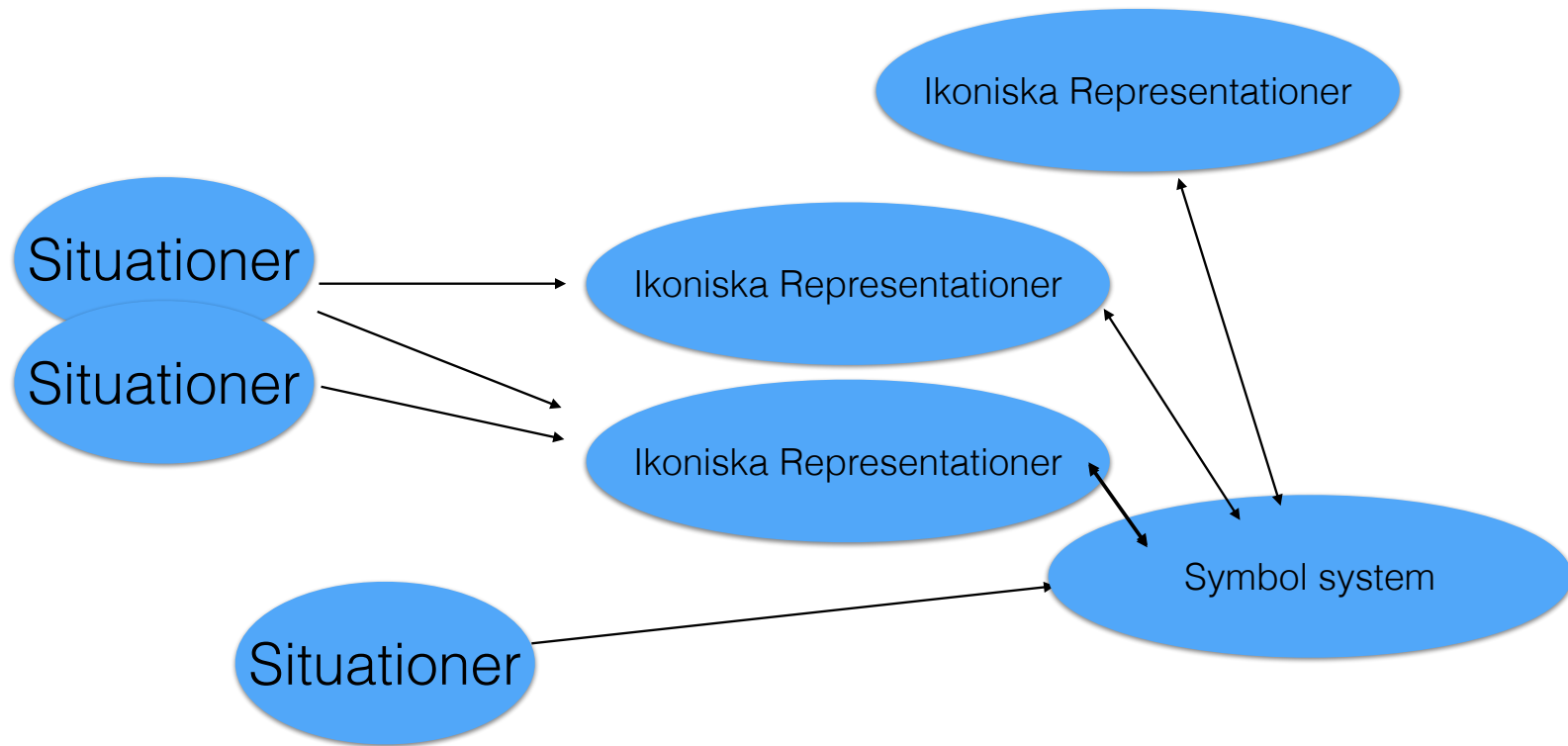
$$\frac{a}{b}$$

Situation: Dela upp a saker i b väskor. Hur många i varje väska?

Ikonisk representation:



Icke-ikonisk representation/relationer i symbolsystem: $\frac{a}{b}$ är ett tal c sådant att $b \cdot c = a$



POLYSEMY:

What should you multiply a with to get b?

How much more (multiplicatively) is b than a?

What is the scaling factor that takes b to a?

What is the ratio of a and b?

What is the quotient of a and b

How much b fits in a?

$$\frac{a}{b}$$

Q7

What is $\frac{a^5}{a^5}$? (a is not 0.)

- You cant say 1
- a^1 0
- I don't know (19/39/33%)

Q10 Which fractions can be simplified?

$$\frac{24}{36} \quad \frac{23}{36} \quad \frac{24}{37} \quad \frac{25}{36}$$

- $\frac{24}{36}$ and $\frac{25}{36}$ All
- $\frac{24}{36}$ I don't know
- (-/40/55%)

Q14 Which fractions can be simplified?

$$\frac{\pi}{3\pi} \quad \frac{2b}{7b} \quad \frac{3c}{4b} \quad \frac{2c}{4d}$$

- $\frac{\pi}{3\pi}$, $\frac{2b}{7b}$ and $\frac{3c}{4b}$ All
- $\frac{\pi}{3\pi}$, $\frac{2b}{7b}$ and $\frac{2c}{4d}$ I don't know
- (-/29/54%)

Q27 Which equalities hold?

$\frac{3a^8}{12a^4} = 4a^4$ $\frac{3a^8}{12a^4} = \frac{1}{4}a^4$

$\frac{3a^8}{12a^4} = \frac{1}{4}a^2$ I don't know

(-/19%)

Q31 Which equalities below hold (b is not 0 or 1)?

$\frac{a-1}{b-1} = \frac{a}{b} - 1$ All

$\frac{a-1}{b-1} = \frac{a}{b}$ I don't know

(-/18%)

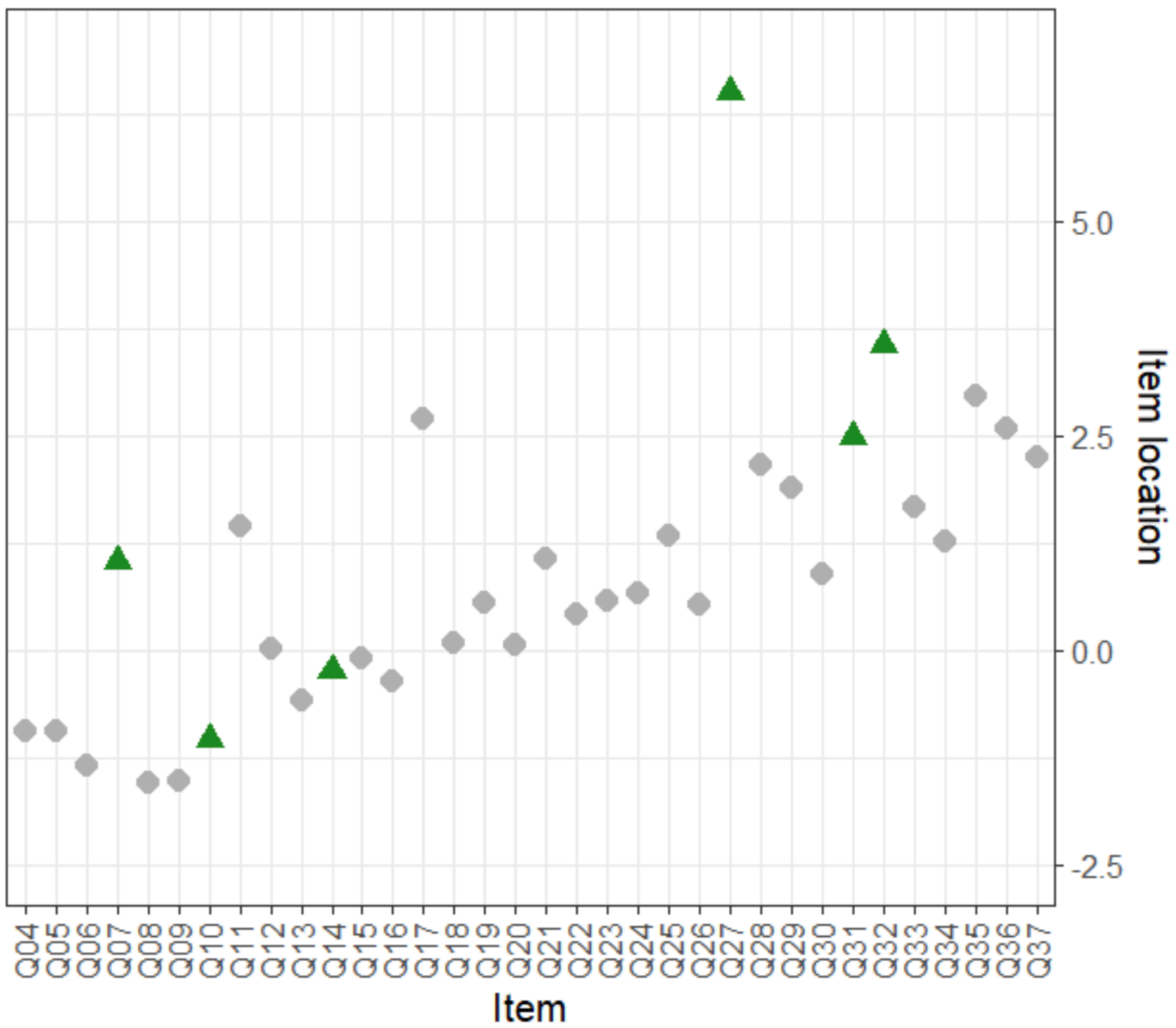
Q32

What is $\frac{3a^4 \cdot 2b^3 \cdot c^2 \cdot 2}{4a^3 \cdot 3c \cdot 27}$ equal to?

$\frac{a \cdot b^3 \cdot c}{27}$ $\frac{a \cdot 2b^3}{27c}$

$\frac{1}{9}$ I don't know

(-/19%)



A $1,003 \cdot 0.98 = 0,98294$. Which of the equalities below is also true?

$1,003 \cdot 0,98294 = 0.98$

$0.98 = \frac{0,98294}{1,003}$

None of the equalities

I don't know (- / 35% / 37%)

B The equality $c = \frac{a}{b}$ holds. Neither a, b or c is 0. What can be said about the equalities below?

$ca = b$ holds

Only one of the equalities $b = \frac{a}{c}$ and $a = bc$ holds

$b = \frac{a}{c}$ and $a = bc$ both holds

I don't know (- / 18% / 36%)

C 3 liters=30 dl of lemonade is to be put in cups containing $\frac{1}{2}$ dl. How many cups will the lemonade be enough for? Which expression describes the situation?

$\frac{30}{\frac{1}{2}} = -$ $\frac{1}{2} = -$

$30 \cdot \frac{1}{2} = -$ I don't know

(30% / 30% / 32%)

D You have 19 bags and there should be the same number of marbles in each bag. You have 323 marbles. Which expression describes the number of marbles per bag?

$\frac{19}{323} = -$ $19 \cdot - = 323$

$323 \cdot - = 19$ I don't know

(19% / 24% / 32%)

E In a football team there are three times as many players as coaches. If the number of players is p and the number of coaches is c , which of the equalities below show the relationship of p and c ?

$\frac{c}{3} = p$ $3p = c$

$p = 3c$ I don't know

(- / 28% / 31%)

F If $\frac{4}{5}k = s$, which one of the expressions below hold?

$k = 4s$ $k = \frac{5}{4}s$

$k = \frac{4}{5}s$ I don't know

(- / 16% / 21%)

1. Vad är $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$?

Alternativt: 1. Vad är $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}$?

2. Vad är $\frac{a^5}{a^5}$?

3. Om $\frac{1}{3}x = 1$ Vad är: $\frac{1}{3}x + 4 = \underline{\hspace{2cm}}$

4. Vilka bråk går att förkorta och varför?

$$\frac{24}{36} \quad \frac{23}{36} \quad \frac{24}{37} \quad \frac{25}{36}$$

5. Vad är $\frac{2025 + 2025 + 2025}{2025 + 2025 + 2025 + 2025 + 2025}$?

1. Vad är $3 \cdot \frac{1}{3}$?

1 alt. Vad är $\pi \cdot \frac{1}{\pi}$?

5

2. Hur hög är en röd kaktus (R) i förhållande till en blå kaktus (B) om den blå kaktusen är $\frac{1}{2}$ av den röda kaktusens höjd? Skriv upp uttrycket. Använd beteckningarna R och B.

2 alt. Hur hög är en röd kaktus (R) i förhållande till en blå kaktus (B) om den blå kaktusen är $\frac{3}{7}$ av den röda kaktusens höjd? Skriv upp uttrycket. Använd beteckningarna R och B.

3. Vad ska du multiplicera 8 med för att få 7?

4. Varför är $6 \cdot 4 = 3 \cdot 8$? (Obs att säga att båda är 24 är inte ok)

5. Vilka tal är lika? $\frac{1}{4}$ $\frac{4}{16}$ $\frac{4}{12}$ $\frac{2}{8}$?

3. Hvad skal du gange 8 med for at få 7?

Brøker kan repræsentere:
mål, kvotient, forhold og **operator**

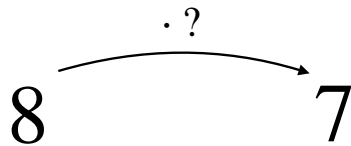
Her arbejder vi med brøker som en skaleringsoperator. Det er godt at kunne tænke på dette på to måder:

1) 8 skal ganges med et ukendt tal, og resultatet skal være 7:

$$8 \cdot ? = 7$$

2) Som en slags transformation eller funktion, der tager 8 til 7:

Tænk i to trin. Brug det faktum, at et tal ganget med dets inverse er én. Gang derefter med 7.



Vi vil vise tre forskellige måder at vise, at det tal, vi leder efter, er $\frac{7}{8}$

Hvis eleverne har arbejdet meget med tal i decimalform, vil de tro, at skaleringsoperatoren skal være et udtryk i decimalform. At finde en operator i decimalform virker nogle gange. At oprette en operator i brøkform virker altid. At kunne konstruere en operator i brøkform er helt centralt for at kunne udføre proportional ræsonnement.

3. Vad ska du multiplicera 8 med för att få 7?

Svaret är $\frac{7}{8}$

Lösning 1. Vi visar att $\frac{7}{8}$ löser uppgiften med bråkräkning

$$8 \cdot \frac{7}{8} = \frac{8}{1} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7 \cdot 8}{1 \cdot 8} = \frac{7}{1} = 7$$

The diagram includes several annotations: a green box at the top right contains $\frac{a}{a} = 1$ with a blue arrow pointing to the $\frac{8}{8}$ term in the denominator of the third fraction; a green oval circles the 8 in the numerator and the 8 in the denominator of the third fraction, with a green "= 1" above it; a green box at the bottom right contains the formula $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

Alla tal kan skrivas på bråkform med en neutral etta i nämnaren

$$a = \frac{a}{1}$$

Kommutativa lagen i täljaren

$$ab = ba$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Gemensamt bråkstreck

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

3. Vad ska du multiplicera 8 med för att få 7?

Svaret är $\frac{7}{8}$

Lösning 2. Vi visar att $\frac{7}{8}$ löser uppgiften med bråkräkning genom att använda:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a$$

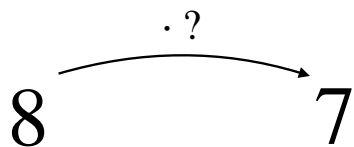
$$8 \cdot \frac{7}{8} = 8 \cdot \frac{1}{8} \cdot 7 = 1 \cdot 7 = 7$$

The diagram illustrates the step-by-step simplification of the equation $8 \cdot \frac{7}{8} = 7$. The fraction $\frac{1}{8}$ is circled in green, with an arrow pointing to it from the text "Ett tal gånger sin invers är 1" (A number multiplied by its inverse is 1) and the equation $a \cdot \frac{1}{a} = 1$. Another arrow points from the text "1 är neutralt i multiplikation" (1 is neutral in multiplication) and the equation $1 \cdot a = a$ to the $1 \cdot 7$ part of the equation. A third arrow points from the text $\frac{a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a$ to the $\frac{7}{8}$ part of the equation. The final result is 7.

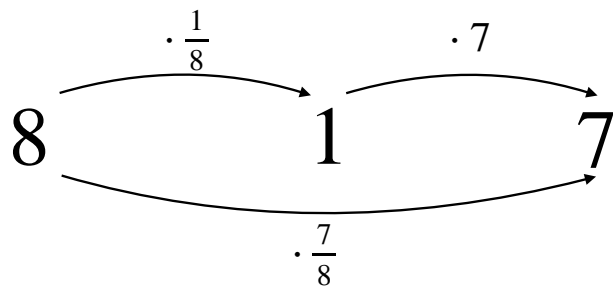
3. Vad ska du multiplicera 8 med för att få 7?

Svaret är $\frac{7}{8}$

Lösning 3. Vi tänker med konsekutiva skalningar



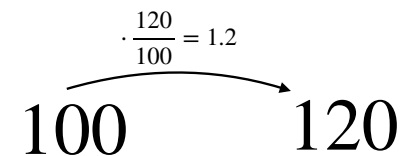
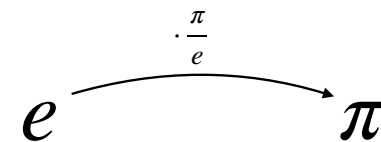
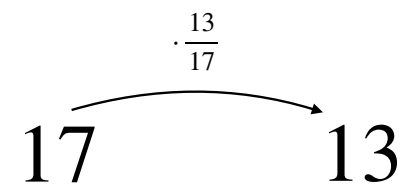
Vi delar upp skalningen i två, och skalar först 8 till 1. Det gör man med $\cdot \frac{1}{8}$. Sedan skalar vi 1 till 7. Det gör man med $\cdot 7$



Till slut sätter vi ihop $\cdot \frac{1}{8}$ och $\cdot 7$ och får $\cdot \frac{7}{8}$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a$$

Visa gärna andra exempel

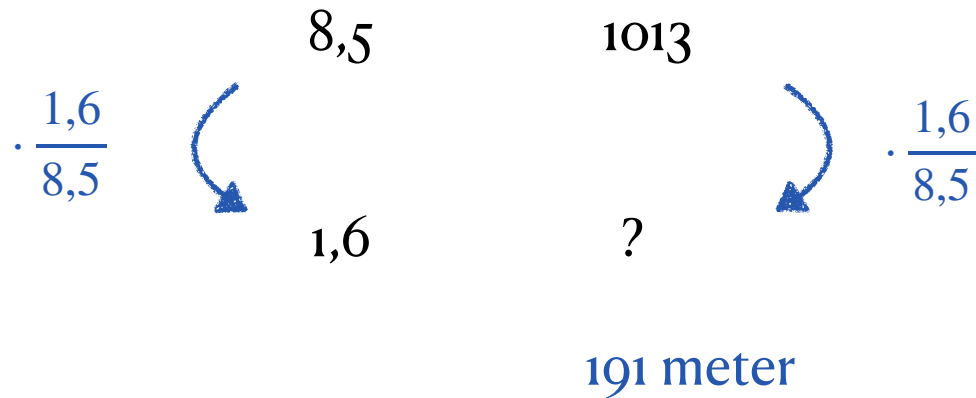


På en bild av en hängbro är avståndet mellan bropelarna 8,5 cm och bropelarna är 1,6 cm höga. I verkligheten är längden mellan bropelarna 1013 meter. Hur höga är bropelarna?



Kommutativt diagram

bild (cm) ~verklighet (m)



1. Matematiker är lata. Eftersom de inte orkar skriva $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$ så har de kommit överens om att man kan skriva 7^6 istället för $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

Beräkna $\frac{7^6}{7^4}$

Alternativt: Vad är $\frac{7^6 \cdot 7^2}{7^4 \cdot 7^2}$?

$$2. \quad 2 = \frac{3}{3} + \frac{3}{3}$$

$$\frac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

$$\frac{1}{3} \cdot 6 = 2$$

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

$$\frac{7^6}{7^4} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7} = 7^2$$

$$\frac{7^6 \cdot 7^2}{7^4 \cdot 7^2} = \frac{7^8}{7^6} = 7^2$$

Exera $3x + 6 = 13$

$$\begin{array}{r} 3x + 6 = 13 \\ -6 \quad -6 \\ \hline 3x = 7 \\ \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \\ \hline x = 2,3333 \end{array}$$

$$\frac{a}{a} = 1$$

$$3x + 6 = 13$$

$$\begin{array}{r} -6 \quad -6 \\ \hline 3x = 7 \\ \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \\ \hline x = 2,3333 \end{array}$$

$$\frac{1}{3} \cdot x = 2$$

$$\frac{1}{3} \cdot 6 = 2$$

$$x = 6$$

$$\frac{7^6 \cdot 7^2}{7^4 \cdot 7^2} = \frac{7^6 \cdot 1}{7^4 \cdot 1}$$

$$\frac{1}{3} \cdot x = 2$$

$$\frac{1}{3} \cdot 6 = 2$$

$$x = 6$$

$$\frac{7^6}{7^4} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}$$

$$\frac{6^{99}}{6^{95}} = 6^4$$

Extra Lös elevationen

$$3x + 6 = 13$$

$$\begin{array}{r} -6 \quad -6 \\ \hline 3x = 7 \\ \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \\ \hline x = 2,3333 \end{array}$$

Ma 13.00-13.50

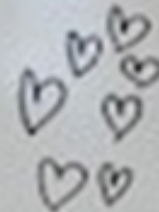
Hvad er $\frac{-3x}{3x}$

$$1) \frac{a}{a} = 1 \quad \frac{(-1) \cdot 3x}{3x} = 1 = -1 \cdot 1 = -1$$

$$\frac{-1 \cdot 3x}{3x} = -1 \cdot 1 = -1$$

molly o gloria
Skrev alt

~~Skrev~~ 8/10



$$1. \frac{\sqrt{7} \cdot 3,75}{3,75 \sqrt{7}} = \frac{3,75 \sqrt{7}}{3,75 \sqrt{7}} = 1$$

Denna typ av uppgifter har eleverna nu greppat riktigt bra och känner sig stolta över att kunna lösa. Även relativt osäkra elever ser och kan lösa dem.



Ett försök till ökad elevaktivitet. I brist på fler whiteboards så fick det bli fönster. Blev ett helt annat drag i klassrummet



1. Vad är $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}}$

2. Vad är $\frac{\frac{7}{3}}{\frac{7}{3}}$

2. Vad är $\frac{b^4}{b^4}$

3. Om $3^4 - x = 72$ Vad är: $3^4 - x + 11 =$

4. Bara ett av dessa bråk går att förkorta. Vilket bråk och varför?

$$\frac{24}{36} \quad \frac{23}{36} \quad \frac{25}{36}$$

5. Vad är $\frac{999 + 999 + 999}{999 + 999 + 999 + 999 + 999}$

1. Vad ska stå på den tomma raden för att likheten ska stämma?

$$n+m+\underline{\quad} = n+p$$

2. Vi vet att $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

Vad är $(5^3)^2$?

3. Förenkla/ förkorta $\frac{7a^{13}}{21a^8} =$

4. En kub där alla kanter är a långa har en volym som är $V = a^3$.
Hur stor är volymen av en kub där kanterna är $2a$?

5. Lös ekvationen: $3x + 5 = 7$

1. Vad ska stå på den tomma raden för att likheten ska stämma?

$$n+m+\underline{\quad} = n+p$$

Ledtråd: Det får vara flera grejer på raden. Ta bort det som inte ska vara med och lägg till det som behövs för att VL och HL ska vara lika.

2. Vi vet att $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

Vad är $(5^3)^2$?

Ledtråd: Byt ut 5^3 mot 125

3. Förenkla/ förkorta $\frac{7a^{13}}{21a^8} =$

Ledtråd: Kvittera ut alla ettor

4. En kub där alla kanter är a långa har en volym som är $V = a^3$.

Hur stor är volymen av en kub där kanterna är $2a$?

Ledtråd: Glöm inte en parentes runt $(2a)$

5. Lös ekvationen: $3x + 5 = 7$

Ledtråd: Svaret ska vara skrivet i bråkform - annars är det fel

A repetition structure

A motivation structure

(1)

Vad är x ?

1. $6 \cdot 4 = x \cdot 8$

2. $6 + 4 = 8 + x$

3. $2x + 4 = x + 8$

4. $x + x + x + x + x = x + x + x + x + 6$

5. $x + 6 = 3 + 5 + 6$

(2)

Vad är x ?

1. $\frac{6}{2} = \frac{12}{x}$

2. $\frac{6}{2} = \frac{x}{3}$

3. Det finns askar med pengar, lika mycket i alla askar. Ola har 2 askar och 4 kronor. Linda har 1 ask och 8 kronor. De har lika mycket pengar. Skriv en ekvation för det.

4. $20x - 120 = 10x + 80$

5. $\frac{6}{2} = \frac{y+3}{3}$

(3)

1. x^2 betyder $x \cdot x$.

x^3 betyder $x \cdot x \cdot x$.

Vad kan x^7 betyda?

2. Om $x^2 = 16$, vad kan x vara?

3. Om $x^4 = 10000$, vad kan x vara?

4. Vilket x gör att likheten stämmer?

$$10x - 220 + 2x + 100 = 10x + 80 + 100$$

5. Det finns ett tal som heter minuset. Man skriver -1 . Det är tiokompis till 11, så $-1 + 11 = 10$.

Vad är $-1 + 10$?

(4)

1. Vad ska man multiplicera 10 med för att få 5?

2. Vad ska x vara för att likheten ska stämma?

$$6 + 2x = 4 + x$$

3. Vad ska x vara för att likheten ska stämma?

$$7x = 5$$

4. Vad ska x vara för att likheten ska stämma?

$$6 + x = 4$$

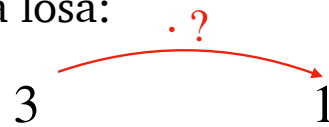
5. Vad ska man multiplicera 3 med för att få 2?

5. Vad ska man multiplicera 3 med för att få 2?

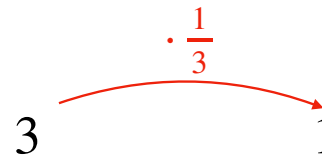
Vi ska lösa:



Vi skulle kunna lösa:

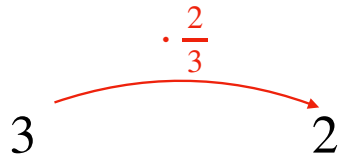


för



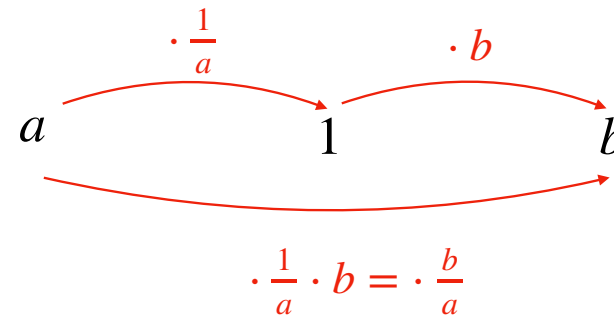
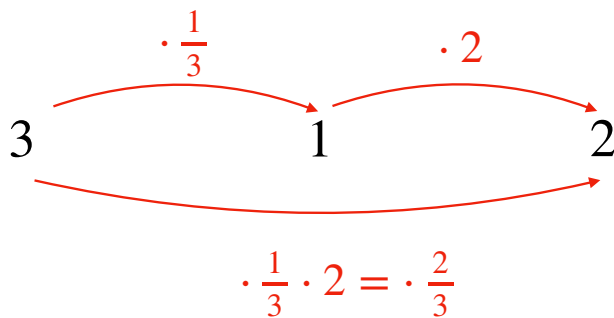
$$3 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

Vi måste ha något som är dubbelt så stort som $\frac{1}{3}$. Dvs $\frac{2}{3}$



$$3 \cdot \frac{2}{3} = 2$$

Vi hade kunnat gjort det i två steg och det funkar alltid så (utom med 0)



$$a \cdot \frac{b}{a} = b$$