Er 0 et tal?

Gymnasieelevers vanskeligheder ved at forstå og omgås 0'et

Mogens Niss & Uffe Jankvist

Cliff-hangers:

- Begrebet **hypnosmose**
- Matematikdidaktikkens **første og anden hovedsætning**

Introduktion

I**1960'rne** konstaterede matematikdidaktikere, at elevers regnerier ofte går galt, når 0 er involveret (e.g. Oesterle, 1959; Henry, 1969; Edwards, 1971).

Reys (1974) foreslog at **udforske** problemet

⇒ empiriske studier af Reys & Grouws (1975) and Grouws & Reys (1975).

De valgte at fokusere på **division omhandlende 0**.

Snart gik man videre, inddrog også lærerstuderende.

Hvad fandt forskerne? Bl.a.:

- For mange elever er **0 ikke et tal** – siges udtrykkeligt af mange
  - Selv for dem, som accepterer 0 som et tal, er det et **undtagelsestal**
- Der er snarere et symbol for **”ingenting”**
- **Sammenblander** ”ingenting” som abstrakt begreb med ”intet af noget”, som jo er en kvantitativ størrelse
- Elever **søger efter hverdagsfortolkninger,** som kan give mening til 0 som aktør i aritmetiske operationer, sådan som det er muligt med naturlige tal
  - ”Det er OK, at 0 · 5 = 0, for hvis du *har* ingenting fem gange, *har* du stadig ingenting, men ”hvordan kan 5 · 0 = 0? For, når du *har* 5 nul gange, hvordan kan de så 5 forsvinde? Vi må have 5 · 0 = 5.” (Hefendehl-Hebeker, 1982). Trodser kommutativiteten af multiplikation.
  - Tilsvarende: ”Det er klart, at 0 : 5 = 0, for, hvis du ingenting har og deler det med 5 har du stadig ingenting”, men ”5 : 0 må være 5, for hvis du *har* 5 og deler det med nul – dvs, med ingenting – har du ikke foretaget dig noget, og de 5 er der endnu.”

Altså at gange med - eller dividere i -, ”ingenting” er det samme som ”*ikke* at gange/ dividere”!

- Når de forholder sig til 0 i aritmetiske operationer, **inddrager elever ikke den matematiske betydning af operationerne**:
  - Meningen med division er ikke i fokus (Ball, 1990)
  - De inddrager ikke, at multiplikation og division er hinandens inverse operationer
  - Der tænker ikke på, at addition og multiplikation er kommutative

- Matematikdidaktikere forsøgte at **imødekomme elevers behov for mening** ved at opfinde – mere eller mindre kunstige - hverdagssituationer som kan give modeller for operationerne. (Knifong & Burton, 1980; Watson, 1991;Tsamir & Scheffer, 2000). Det viste sig imidlertid meget **svært**, særligt for 0 : 0.

- For at forstå elevernes vanskeligheder ved at omgås 0 **søgte forskerne efter mulige forklaringer**:
  - i 0'ets (lange og indviklede) matematiske historie.
  - i interviews med elever og lærerstuderende om deres opfattelser og forståelse af 0 (Reys & Grouws, 1975; Hefendehl-Hebeker, 1982; Crespo & Nicol, 2006).

Hvad er 0?

I. 0 i **ren** matematik:

- **A.** som **tal** i ren matematik
  - som **talsymbol** i forskellige roller:
    - i positionssystemet (307, 0.307), som eksponent (a^0 ($=_D 1$)), grænseværdi ($a_n \to 0$, $f(x) \to 0$), index x_0
  - som **særligt tal** i talområder med algebraisk struktur (Z, Q, R, C, mm.)
    - neutralt element ved addition ($a + 0 = 0 + a = a$)
    - nulelement ved multiplikation ($a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$)
    - i nulreglen ($a \cdot b = 0$, hvis og kun hvis $a = 0$ eller $b = 0$)
  - som mulig **værdi** i kvantitative **matematiske begreber**
    - længde, areal volumen, vinkel, determinant, afledet, bestemt integral, sum af en uendelig række, løsning til ligning, rod i polynomium, funktionsværdi

- **B.** som **særligt element** i **andre matematiske områder** med en algebraisk struktur
  - grupper, ringe, legemer, algebraer, idealer, geometriske vektorer, generelle vektorrum, matricer, moduler, restklasser, polynomier, funktionsrum

II. 0 som **objekt i matematiske modeller** af ekstra-matematiske områder:

- **A.** som **værdi af en** ekstra-matematisk **størrelse**
  - **diskrete størrelser** (direkte observation) – kardinaliteten af en tom mængde af genstande

    antallet af champagneflasker i dette rum er 0; der var 0 registrerede koppetilfælde i Danmark i 2023
  - **kontinuerte størrelser** (direkte observation eller definition) – målet af en tom mængde af stof

    mængden af vin i dette glas er 0; vand fryser ved 0^0 C; vinklen mellem to visere i et ur er 0.
  - **værdi målt** med et ”instrument”

    termometret viser 0; pH-metret viser 0; den årlige inflationsrate er nu 0
- **B.** som **nominal etiket** uden matematiske egenskaber

    0’te etage; talkoder; point i spil

- 0 er altså et objekt med **mange roller, facetter og egenskaber**, hvoraf nogle er specielle
- Giver anledning til **tvivl og forvirring**

- Det så vi bl.a. i RUCs **videreuddannelsesprogram for gymnasielærere** 2012-2021

- Førte til et mindre forskningsprojekt hvor I nu har set artiklen
- 214 1.g'ere i et velrenommeret gymnasium svarede efter valg af studieretning, dvs. efter 9½ års matematikundervisning, på 20 spørgsmål i vedrørende 0.
- Vi ser på 14 af disse spørgsmål, fokuseret på **I. 0 som tal**

Kort om "detektionstest"

RUCs matematikvejlederuddannelse, 2012-2021: uddannelse af gymnasielærere til at hjælpe elever med **matematikspecifikke** (ikke generelle) **læringsvanskeligheder** – MN og Uffe Jankvist, nu DPU:

- Søge redskaber til at finde - **detektere** - sådanne **elever**

Som hovedredskab udviklede vi tre tematiske detektionstest – svarende til uddannelsens tre semestre på deltid:

- Begreber og begrebsdannelse (57 spm.)
- Ræsonnement og bevisførelse (23 spm.)
- Modeller og modellering (13 spm.)

På baggrund af bl.a. disse test videre med

- udvælgelse af elever til nærmere indsats
- diagnosticering af arten af læringsvanskeligheder hos de detekterede elever, og derefter med
- intervention m.h.p afhjælpning/modvirkning af disse læringsvanskeligheder

Detektion af elever med matematikspecifikke læringsvanskeligheder skal støttes med andre redskaber, fx elevsamtaler, lærerkendskab til elever.

Her fokus på detektionstest.

- Oprindeligt: ikke så mange elever med matematikspecifikke læringsvanskeligheder i hver gymnasieklasse (”det var en anden tid”).

- Med tiden – og i dag - **mange flere**.

- Vanskelighederne findes imidlertid i **alle skoleformer** og på **alle niveauer** heri.

- De spiller en **væsentlig rolle i problemer** vedrørende **overgangen fra grundskole til gymnasium** (og herfra til videregående matematikforbrugende uddannelser)

Hypotese om **hovedkilderne** til disse vanskeligheder:

- Myndigheder m.m. opfatter **matematik som lig med et pensum**
- Eleverne opfatter **matematik som et huskefag** om **pensum-regler-procedurer-rutiner** med fokus på efterligning og gentagelse.
- Eleverne opfatter **ikke matematik som et tænke-handlefag**.
- Begreber, regler, metoder og procedurer **kan ikke for alvor forstås**, men **skal bare læres**. De er opfundet af nogle særlige mennesker, udstyret med særlige egenskaber, som ikke findes hos almindelige mennesker.
- Matematik giver derfor **kun rigtig mening for de få**.
- Matematik **kan sjældent bruges til noget** i verden (**relevansparadokset**)

Kriterier for **design af detektionstest**:

Fokus på

- Matematiske **kompetencer**
- Matematiske **tænkemåder og tankegange**, **ikke** på emner, pensum, standardopgaver eller prøver
- Matematik som **tænkefag snarere end huskefag**
- **Tilgangen til situationer og problemstillinger** – forstå opgaven, tænk selv og tænk logisk
- **Begreber og processer snarere** end opskrifter og regler
- **Udnyttelse** af relevant matematikdidaktisk **forskning**
- Testspørgsmålene skal være på et **lavt regneteknisk niveau**

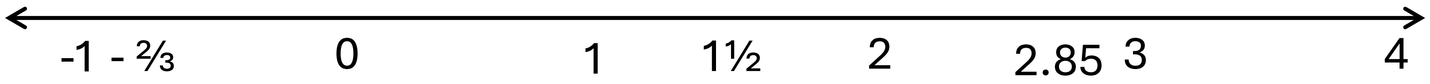
- **Detektionstest** er et (første) middel til at komme nærmere på elevernes matematiske tankegang, **ikke** et mål eller et resultat.
- **Detektionstest afdækker ikke** elevers pensumbeherskelse og standpunkter.
- **Detektionstest egner sig ikke** til standpunktsscreening af en elevpopulation – men nok til screening af læringsproblemer
- **Detektionstest konkurrerer ikke** med afgangsprøver eller eksamener.
- **Detektionstest** vedrører i udgangspunktet enkeltelever, men **kan** alligevel – med omtanke og omhu – anvendes på populationer (herom senere).

Opgaver

Gruppe 1: ”0’ets natur”:

- **S 3**: Hvilke heltal findes der mellem -2 og 3.5, begge ender inkluderet:
  67% fejlsvar – heraf 27% 0-fejl

- **S 18**: På tallinjen nedenfor har vi markeret nogle tal. Hvilke af disse tal er hele?



36% fejlsvar – heraf 24% 0-fejl

34% svarer forkert på begge spørgsmål

Gruppe 2: ”0 divideret med et konkret tal (≠ 0)”

- **S 10:** Er 0 divideret med 3 lig med 0? **24% fejlsvar**

  ”det kan man ikke!”

  ”ja, for det er det samme som at dele 0 æbler mellem tre personer; du kan ikke dele noget som ikke er der”

  ”nej, du kan ikke dividere med 0”

  ”nej, det er lig med 3, fordi du har ikke delt tallet 3”

  ”0/3 = hjerneeksplosion”

- **S 15:** Er 0/5 = 0? **20% fejlsvar**

  ”det kan man ikke, så svaret er 0”

  ”ja, for 0 er ingenting, og du kan ikke dele 0 med 5”

- **S 16:** Er 0/5 = 5? **18% fejlsvar**

  ”nej, det er 0”

  ”du kan ikke dividere noget, du ikke har”

11% svarer forkert på alle tre spørgsmål

Gruppe 3: ”0 ganget med eller lagt til et variabelt tal”

- **S 8:** Hvad er $0 \cdot x$? **9% fejlsvar**

  ”du kan ikke gange 0 med x”

- **S 9:** Hvad er $0 + x$? **11% fejlsvar**

  ”du kan ikke lægge x til 0”

2% svarer forkert på begge spørgsmål

Gruppe 4: ”0 som løsning til en speciel ligning”

- **S 14:** Er 0 en løsning til ligningen $3x - x = 2x$. Hvis ja, hvorfor? Hvis nej, hvorfor ikke? **57% fejlsvar**

  ”nej, du kan ikke have multipla af 0”

  ”nej, det kan ikke give 0 i en ligning”,

  ”nej, tallet ændrer sig ikke, når man ganger med 0 eller trækker det fra”

  ”nej, for hvis du ganger med 0 ændres tallet automatisk til 0”

Gruppe 5a: ”0 som resultat af division af et konkret tal med sig selv”

- **S 2:** Hvad er $\sqrt{3}/\sqrt{3}$? **32% fejlsvar**

  ”har ingen idé”

  ”9/9 = 0”

  ”giver 0, fordi de går ud med hinanden”

  ”0, for du har 3 og giver 3 væk, og så har du 0 tilbage”

- **S 6:** Hvad er $2^3 / 2^3$? **24% fejlsvar**

  ”= 0”

  ”er det en division eller en brøkstreg”

- **S 19:** Hvad er 8 / 8? **13% fejlsvar**

  ”= 0”

8% svarer forkert på alle tre spørgsmål

Gruppe 5b: ”0 som resultat af division af et tal på symbolsk form med sig selv”

- **S 5:** Hvad er a^5 / a^5 (hvor a ≠ 0)? **43% fejlsvar**

  ”0”

  ”uanset hvad, er svaret 0”

  ”0, tallet er irrelevant, for det er det samme i tæller og nævner”
- **S 12:** Hvad er a / a (hvor a ≠ 0)? **41% fejlsvar**

  ”0”
- **S 17:** Hvad er √a / √a (hvor a ≠ 0)? **46% fejlsvar**

  ”det ved jeg ikke, a?”

31% svarer forkert på alle tre spørgsmål

En betydelig del af eleverne giver svaret ”0” på Gruppe 5-spørgsmålene, selv om **0 intet har med sagen at gøre**: **Markør af fravær**

En betragtelig del af eleverne har så alvorlige vanskeligheder ved at omgås 0, at de har/får svært ved at lære matematik.

- ”0 er da ikke noget tal!” (Christensen, 2016)

Størstedelen klarer det dog rimeligt.

Gruppe	1	2	3	4	5a	5b
Spm.	13 & 18	10, 15 & 16	8 & 9	14	2, 6 & 19	5, 12 & 17
# fejlsvar	73	24	5	122	17	66
% fejlsvar	34,1	11,2	2,3	57,0	7,9	30,8

P(GrY|GrX) X:	Gr. 1	Gr. 2	Gr. 3	Gr. 4	Gr. 5a	Gr. 5b
Gr. 1 (# 73)	1	.21	.04	.70	.10	.38
Gr. 2 (# 24)	.63	1	0	.67	.29	.46
Gr. 3 (# 5)	.60	0	1	.80	.20	.80
Gr. 4 (# 122)	.42	.13	.03	1	.10	.42
Gr. 5a (# 17)	.41	.29	.06	.65	1	.76
Gr. 5b (# 66)	.42	.17	.02	.77	.20	1

Forklaringsforslag

- 0's mange **roller, facetter og egenskaber er forvirrende** og sammenblandes let.
- Eleverne er vant til, at **al matematik umiddelbart kan realitetsfortolkes**. 0 fortolkes som **"ingenting"**, dvs. som **markør af fravær**. Der skelnes ikke mellem abstrakt "ingenting" og kvantitativt "ingenting af 'noget'" .
- Men **mange træk ved 0 kan ikke realitetsfortolkes;** de kan kun forstås indenfor et matematisk univers, fx 0 som eksponent, umulighed/meningsløshed af division med 0.
- 0 er et **undtagelsestal** og dermed **"farligt"**.

- Der **undervises ikke for alvor i 0'et**, højst i form af anvisninger.
- Det antages, at **viden om og forståelse af 0 opnås** ved en kombination af (indoktrinerings)hypnose og osmose: **hypnosmose**

Dette **strider mod matematikdidaktikkens første hovedsætning**:

- **Hvis man ønsker, at eleverne skal lære noget med forståelse, skal de undervises i det!**
- **Anden hovedsætning: Man lærer ikke matematik blot ved at lade tiden gå!)**

Tak for opmærksomheden!

☺