Detektionstest og deres brug

Mogens Niss

IMFUFA,INM, Roskilde Universitet

Baggrund og formål

RUCs matematikvejlederuddannelse, 2012-2021: uddannelse af gymnasielærere til at hjælpe elever med **matematikspecifikke** (ikke generelle) **læringsvanskeligheder** – MN og Uffe Jankvist, nu DPU:

- Søge redskaber til at finde - **detektere** - sådanne **elever**

Som hovedredskab udviklede vi tre tematiske detektionstest – svarende til uddannelsens tre semestre på deltid:

- Begreber og begrebsdannelse (57 spm.)
- Ræsonnement og bevisførelse (23 spm.)
- Modeller og modellering (13 spm.)

På baggrund af bl.a. disse test videre med

- udvælgelse af elever til nærmere indsats
- diagnosticering af arten af læringsvanskeligheder hos de detekterede elever, og derefter med
- intervention m.h.p afhjælpning/modvirkning af disse læringsvanskeligheder

Detektion af elever med matematikspecifikke læringsvanskeligheder skal støttes med andre redskaber, fx elevsamtaler, lærerkendskab til elever.

Her fokus på detektionstest.

- Oprindeligt: ikke så mange elever med matematikspecifikke læringsvanskeligheder i hver gymnasieklasse (”det var en anden tid”).

- Med tiden – og i dag - **mange flere**.

- Vanskelighederne findes imidlertid i **alle skoleformer** og på **alle niveauer** heri.

- De spiller en **væsentlig rolle i problemer** vedrørende **overgangen fra grundskole til gymnasium** (og herfra til videregående matematikforbrugende uddannelser)

Hypotese om **hovedkilderne** til disse vanskeligheder:

- Myndigheder m.m. opfatter **matematik som lig med et pensum**
- Eleverne opfatter **matematik som et huskefag** om **pensum-regler-procedurer-rutiner** med fokus på efterligning og gentagelse.
- Eleverne opfatter **ikke matematik som et tænke-handlefag**.
- Begreber, regler, metoder og procedurer **kan ikke for alvor forstås**, men **skal bare læres**. De er opfundet af nogle særlige mennesker, udstyret med særlige egenskaber, som ikke findes hos almindelige mennesker.
- Matematik giver derfor **kun rigtig mening for de få**.
- Matematik **kan sjældent bruges til noget** i verden (**relevansparadokset**)

Kriterier for **design af detektionstest**:

Fokus på

- Matematiske **kompetencer**
- Matematiske **tænkemåder og tankegange**, **ikke** på emner, pensum, standardopgaver eller prøver
- Matematik som **tænkefag snarere end huskefag**
- **Tilgangen til situationer og problemstillinger** – forstå opgaven, tænk selv og tænk logisk
- **Begreber og processer snarere** end opskrifter og regler
- **Udnyttelse** af relevant matematikdidaktisk **forskning**
- Testspørgsmålene skal være på et **lavt regneteknisk niveau**

- **Detektionstest** er et (første) middel til at komme nærmere på elevernes matematiske tankegang, **ikke** et mål eller et resultat.
- **Detektionstest afdække ikke** elevers pensumbeherskelse og standpunkter.
- **Detektionstest egner sig ikke** til standpunktsscreening af en elevpopulation – men nok til screening af læringsproblemer
- **Detektionstest konkurrerer ikke** med afgangsprøver eller eksamener.
- **Detektionstest** vedrører i udgangspunktet enkeltelever, men **kan** alligevel – med omtanke og omhu – anvendes på populationer (herom senere).

En tværgående detektionstest

14 opgaver, hentet fra de tre oprindelige test
(5 fra I, 5 fra II, 4 fra III)

- Udvalgt til decemberkonferencerne i Slagelse og Ålborg, 2025
- Givet på både til **gymnasieelever på stx, htx og hhx** samt elever i **grundskolens 8. og 9. klasse**, i alt **199 elever**
- En dobbeltlektion/et modul afsættes til bevarelsen
- Besvarelsen ønskes uden hjælpemidler – det er elevernes tanker vi vil forstå, ikke hjælpemidlernes
- Lærerne må gerne svare på spørgsmål om, hvordan spørgsmålene skal forstås, ikke om hvordan de skal gribes an, eller som *feedback*

1. (I.13) Hvilket tal er størst 13/3 eller 13/4?

2. (I.17) Findes der nogen værdier af a, således at $a^2 = 2a$?

- Ja: ☐ Nej: ☐ Kan ikke svare: ☐

  [Begrund gerne dit svar]

3. (II.3) Begrund, at ethvert tal er løsning til ligningen $3x – x = 2x$

4. (I.7) Er tallet -a positivt eller negativt, eller kan det ikke afgøres?

- Positivt: ☐ Negativt: ☐ Kan ikke afgøres: ☐

  [Begrund gerne dit svar]

5. (II.11) Et dansk folketingsmedlem udtalte i en folketingsdebat i 1999 følgende:

- ”Når 39% af den mandlige befolkning og 30% af den kvindelige befolkning aldrig kommer på bibliotekerne, vil det sige, at i alt 69% af hele befolkningen aldrig kommer på bibliotekerne.”
- Vurdér denne påstand.

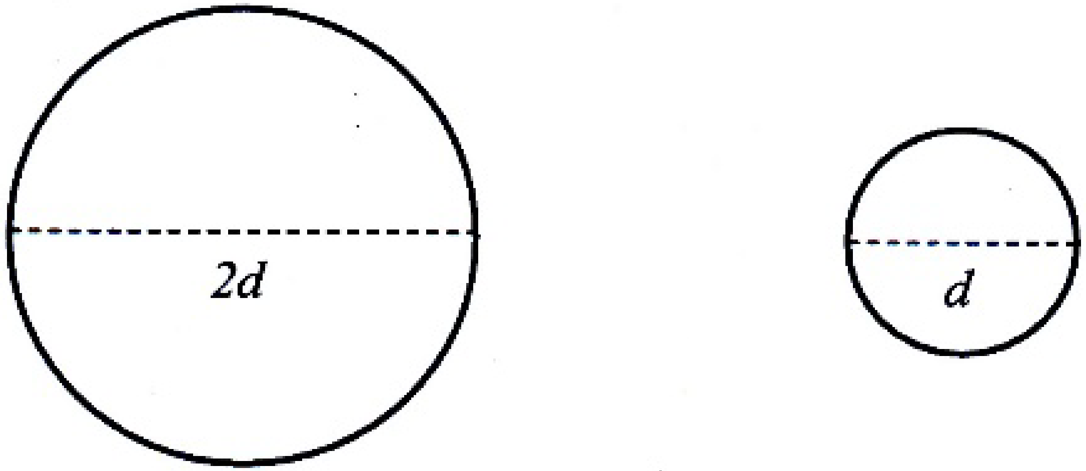
6. (III.4) På en bestemt skole er der 6 gange så mange elever som lærere. Opskriv en formel, der udtrykker sammenhængen mellem antallet, E, af elever og antallet, L, af lærere.

7. (I.33) Løs ligningen x = 1. Løs ligningen (x-3)(x-5) = 0.

8. (II.6) Anser du følgende argument for holdbart:

- ”Det passer aldrig, at $(x+y)^2 = x^2 + y^2$, for vi ved jo, at der altid gælder $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$”?
- Ja: ☐ Nej: ☐ Måske: ☐ Jeg kan ikke svare: ☐

9. (II.15) Søren siger, at hvis man laver en ny cirkel ved at halvere diameteren i en cirkel, har den nye cirkel halvt så stor en omkreds og halvt så stort et areal som den oprindelige. Har Søren ret?



- Ja: ☐ Nej: ☐ Jeg kan ikke svare: ☐

  Giv en kort begrundelse for dit svar.

10. (I.49) Findes der et største tal a, som opfylder $2 \leq a < 4$?

- Ja: ☐ Nej: ☐ Kan ikke svare: ☐

[Begrund gerne dit svar]

11. (III.11) En terning af [massivt] træ med alle kanter lig med 2 cm vejer 4,8 g. Hvad vejer en terning af træ, hvor alle kanter er 4 cm?

[Begrund dit svar]

12. (III.8) Et pizzeria serverer to runde frokostpizzaer af samme slags og tykkelse, men i forskellig størrelse. Den mindste har en diameter på 30 cm og koster 30 kr. Den største har en diameter på 40 cm og koster 40 kr, Hvilken pizza giver mest for pengene?

Vis, hvordan du er kommet frem til dit resultat]

13. (II.20) Aya og Ali betragter tallene 3 og 11. De bemærker, at deres sum (3+11) er et lige tal, mens deres produkt (3·11) er et ulige tal.

- Aya siger: ”Hvis summen af to heltal er lige, er deres produkt ulige.”
- Ali siger: ”Hvis produktet af to heltal er ulige, så er deres sum lige.”

- Er indholdet i Ayas og Alis udsagn det samme?
- Ja: ☐ Nej: ☐ Jeg kan ikke svare: ☐
-

14. (III.7) På en stejl bakke i Athen findes en vej op, der er 4 km lang. Rikke, som er i god form, kan bestige bakken med en gennemsnitsfart på 4 km i timen og gå ned med den dobbelte fart. Hvad er Rikkes gennemsnitsfart for den samlede tur?

[Begrund dit svar]

Kommentarer til udvalgte opgaver

2. (I.17) Findes der nogen værdier af a, således at $a^2 = 2a$?

- Ja: ☐ Nej: ☐ Kan ikke svare: ☐

[Begrund gerne dit svar]

En del elever, tror, at a^2 betyder det samme som 2a

De fleste ved, at a^2 **ikke betyder** det samme som 2a i formel forstand og svarer derfor ”nej”. Disse elever tænker ikke i de mulige værdier af de to størrelser.

De, **der gør**, svarer typisk ”ja”, oftest med a = 2. **Næsten ingen** giver a = 0 som svarmulighed.

Få har blik for **dobbeltheden mellem form og værdi**.

3. (II.3) Begrund, at ethvert tal er løsning til ligningen 3x – x = 2x

Mange giver en **rimelig begrundelse** af generel art.

En **hel del** giver i stedet et par **eksempler**: En instans af den klassiske observation, at man kan begrunde generelle påstande med få eksempler, jf Harel og Sowder's **overbevisningsskemaer**.

4. (I.7) Er tallet -a positivt eller negativt, eller kan det ikke afgøres?

- Positivt: ☐ Negativt: ☐ Kan ikke afgøres: ☐

  [Begrund gerne dit svar]

Langt de fleste svarer ”negativt” og henviser til fortegnet.

En del er dog klar over, at det ”ikke kan afgøres”, før vi ved, om a selv er positivt eller negativt. På dansk skelnes desværre ikke, som på engelsk mellem ”minus a” og ”negative a”, dvs. mellem regneoperationen subtraktion og negativ talidentitet.

5. (II.11) Et dansk folketingsmedlem udtalte i en folketingsdebat i 1999 følgende:

- ”Når 39% af den mandlige befolkning og 30% af den kvindelige befolkning aldrig kommer på bibliotekerne, vil det sige, at i alt 69% af hele befolkningen aldrig kommer på bibliotekerne.”
- Vurdér denne påstand.

Ganske mange elever på alle trin vurderer, at **påstanden er acceptabel**, fordi 39+30 = 69.

Ganske mange elever på alle trin vurderer påstanden som **fejlagtig**.

- Langt de fleste af disse giver som grund, at der ikke er lige mange mænd og kvinder i befolkningen, eller at børn og fx transkønnede ikke er medregnet.
- En hel del svarer, at hvis der er lige mange mænd og kvinder, ville det rigtige svar være 34,5%
- En meget mindre del svarer, at man ikke kan addere procenter fra to forskellige populationer.

Disse svar peger på, at **procentbegrebet** (og procentregning) volder en del elever **store kvaler**.

- **Kalder på opmærksomhed!**

- **6.** (III.4) På en bestemt skole er der 6 gange så mange elever som lærere. Opskriv en formel, der udtrykker sammenhængen mellem antallet, E, af elever og antallet, L, af lærere.

Kendt fra litteraturen som ”the S/P problem”.

Ganske mange leverer den **korrekte formel** E = 6L.

En del laver den klassiske **”omvendingsfejl”**: L = 6E. **En del** producerer **ingen formel**, men **blot et udtryk**, fx Ex6xL

7. (I.33) Løs ligningen x = 1. Løs ligningen (x-3)(x-5) = 0.

Langt de fleste ser, at lign. 1. **er** løst.

En del sætter **x = 1 ind i lign. 2**. Nogle af dem reagerer med ”?” eller postulerer ”= 0”. **En del** svarer **x = 4**.

Mange gymnasieelever omskriver lign. 2 til en **2.gradsligning** og forsøger at løse den, mange med omskrivnings-/regnefejl.

Et forsvindende mindretal svarer, at x-3 = 0 eller x-5 = 0, og at løsningerne derfor er **x = 3 og x = 5**. **Ingen** observerer, at løsningen af en 2.gradsligning netop opnås ved en omskrivning af venstresiden til et produkt.

En del skriver **(3-3)(5-5) = 0**, dvs. sætter forskellige x-værdier ind i de to parenteser.

Lign. 2 virker altså for mange som en **”regne-regne-prompt”**, som ikke kræver indblanding af tankevirksomhed. At sætte forskellige x-værdier ind på forskellige pladser i en ligning er en instans af et kendt generelt fænomen: **Når x er u(be)kendt, kan værdien være forskellig på forskellige pladser.**

8. (II.6) Anser du følgende argument for holdbart:

- "Det passer aldrig, at $(x+y)^2 = x^2 + y^2$, for vi ved jo, at der altid gælder $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$"?
- Ja: ☐ Nej: ☐ Måske: ☐ Jeg kan ikke svare: ☐

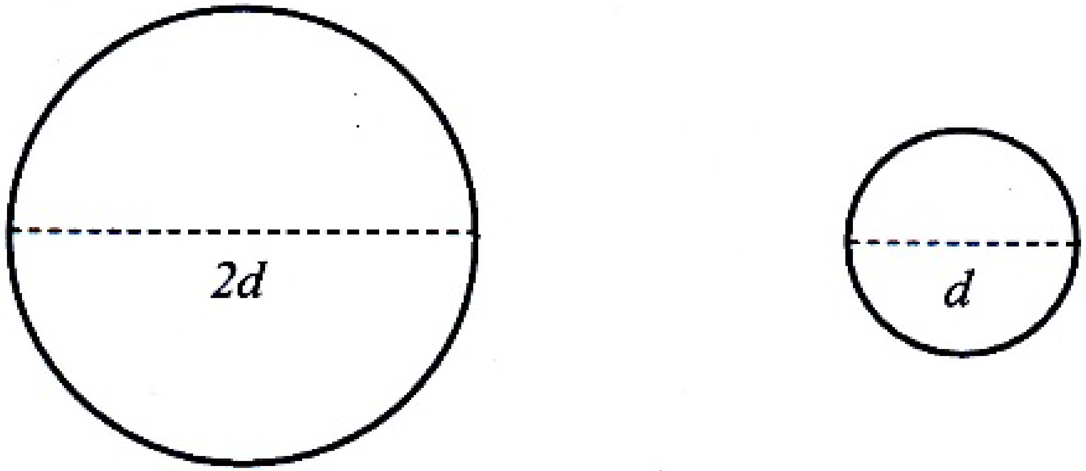
Ganske mange svarer "måske" eller "kan ikke svare"

De fleste anser argumentet for **holdbart**, fordi de genkender kvadratsætningen i påstanden. Nogle bekræfter kvadratsætningen ved udregning.

Kun en håndfuld elever skriver, at påstanden er forkert, fordi $(x+y)^2$ **er** lig $x^2 + y^2$, hvis **$x = 0$ eller $y = 0$**.

Det er **ikke generelt erkendt**, at en **universalsætning/formel** **ikke forhindrer**, at andre sætninger/formler kan være **sande i specialtilfælde**.

9. (II.15) Søren siger, at hvis man laver en ny cirkel ved at halvere diameteren i en cirkel, har den nye cirkel halvt så stor en omkreds og halvt så stort et areal som den oprindelige. Har Søren ret?



- Ja: ☐ Nej: ☐ Jeg kan ikke svare: ☐

  Giv en kort begrundelse for dit svar.

Langt de fleste elever **giver Søren ret** og svarer ”ja” med den begrundelse, at den ”lille cirkel jo er halvdelen af den store”. Det spiller ingen rolle for dem, at Søren fremsætter to påstande.

Et lille mindretal er opmærksom på denne forskel, og svarer, at **Søren ikke har, ret når det gælder arealet**. En del af disse giver en kvalitativ begrundelse.

Et mindretal af mindretallet udregner de to arealer og konstaterer, at det store areal er 4 gange det lille.

For det store flertal er der tale om en **overgeneralisering af linearitet** (her proportionalitet), som er yderst almindelig blandt danske elever på alle trin (se senere).

10. (I.49) Findes der et største tal a, som opfylder $2 \leq a < 4$?

- Ja: ☐ Nej: ☐ Kan ikke svare: ☐

[Begrund gerne dit svar]

Det store flertal ser **kun på naturlige tal** og svarer ”ja, **a = 3**”

Et fåtal svarer ”ja, 3,999…” og tror, at 3,999… < 4.

Et forsvindende mindretal svarer ”nej, fordi **vi kan komme vilkårligt tæt på 4** med 3,999…9”.

For en meget stor del af eleverne **betyder ”tal” altså ”naturligt tal”.** At man kan finde tal vilkårligt tæt på et tal, uden at nå det er ukendt for langt de fleste.

- **11.** (III.11) En terning af [massivt] træ med alle kanter lig med 2 cm vejer 4,8 g. Hvad vejer en terning af træ, hvor alle kanter er 4 cm? Begrund dit svar.

Et overvældende flertal af eleverne svarer **”9,6g”** og begrunder det med **fordobling af alt** på terningen.

En stor del af eleverne, mener, at **en kant** eller **en side har en vægt**.

Meget få elever er på det rene med, at **vægten 8-dobles**, fordi volumenet 8-dobles.

Vi ser her dels en **massiv overgeneralisering af linearitet**, dels at mange elever har **svært ved at tænke 3-dimensionalt** med en terning og dens dele, at forbinde vægt og volumen, osv.

- **12.** (III.8) Et pizzeria serverer to runde frokostpizzaer af samme slags og tykkelse, men i forskellig størrelse. Den mindste har en diameter på 30 cm og koster 30 kr. Den største har en diameter på 40 cm og koster 40 kr, Hvilken pizza giver mest for pengene? Vis, hvordan du er kommet frem til dit resultat.

Størstedelen af eleverne mener, at de to pizzaer giver **lige meget** for pengene, fordi **"1cm pizza koster 1 kr"** i begge tilfælde.

Mange elever svarer, at den på **40 cm. giver mest, fordi den er størst**

Et lille mindretal begrunder, at den største giver mest for pengene, fordi den har **størst areal pr. krone**.

Kompleks problemstilling: **overgeneralisering af linearitet**, hvad menes med **"mest for pengene"?**, hvordan modellere "en mængde pizza" (hvad er **"1cm pizza"?**)

13. (II.20). Aya og Ali betragter tallene 3 og 11. De bemærker, at deres sum (3+11) er et lige tal, mens deres produkt (3·11) er et ulige tal.

- Aya siger: ”Hvis summen af to heltal er lige, er deres produkt ulige.”
- Ali siger: ”Hvis produktet af to heltal er ulige, så er deres sum lige.”

- Er indholdet i Ayas og Alis udsagn det samme?
- Ja: ☐ Nej: ☐ Jeg kan ikke svare: ☐

Langt de fleste elever svar ”**ja**, de siger det samme; **de har bare byttet om på ordene**”. (!!!)

Det **mindretal**, der svarer **”nej”** hæfter sig ved **det matematiske indhold** i påstandene og deres sandhedsværdi.

Ingen peger på, at påstandene ”p ⇒ q”og ”q ⇒ p” ikke udsiger det samme, fordi **de er hinandens omvendte**.

Argumentationslogik er **ikke en naturlig del af elevernes forestillingsverden**.

- **14.** (III.7) På en stejl bakke i Athen findes en vej op, der er 4 km lang. Rikke, som er i god form, kan bestige bakken med en gennemsnitsfart på 4 km i timen og gå ned med den dobbelte fart. Hvad er Rikkes gennemsnitsfart for den samlede tur? Begrund dit svar.

Langt de fleste elever tager **gennemsnittet af de to gennemsnitsfarter**, op og ned, og svarer **6 km/t**.

Mange svarer, at Rikke skal bruge 1t30m på hele turen. Blandt disse elever giver de fleste **ikke noget resultat**.

Et **meget lille mindretal**, **finder gennemsnitsfarten** 5,33 km/t

Begreberne **"gennemsnit"** og **"gennemsnitsfart"** forekommer **ikke adskilt** for eleverne: For "gennemsnit" betyder for dem gennemsnittet af en række tal, så må det samme gælde "gennemsnitsfart". At dette er **et andet begreb** ("tilbagelagt strækning pr. tidsenhed"), er kun klart for få. Også her møder vi altså **overgeneralisering af linearitet**.

Generelle fund

- **Eleverne prøver at huske standardregler, -procedurer, -rutiner**
- **Kun få** går **uhildet og selvstændigt** til værks
- **Logiske strukturer og argumenter** står generelt **ikke i centrum for opmærksomheden**
- **Løs læsning** af **opgaveformuleringer**, herunder –forudsætninger
- **Sproglig præcision** har **lav prioritet**, både i.f.t. matematik og omverdenen – **”ordet tages ikke på ordet”**
- **Uvante ord eller formuleringer spænder ben**

- **Overgeneralisering af linearitet** er **markant**
- **Symbolske udtryk og ligninger volder kvaler**
- **Problemer** med **2- og 3-dimensionale genstandes egenskaber**
- **Talbegrebet** er meget **snævert,**
  - **heltal >< rationale/reelle tal - decimaltal**
  - **negative tal**
- **Procentbegrebet** er **udfordrende** (% er en operator, ikke et tal)
- **Problemer** med **enheder**

Disse fund peger på områder, der fortjener en indsats

"hypnosmose" er ikke nok!

Brugen af detektionstest

- **Det oprindelige formål** - at **detektere elever** med matematikspecifikke læringsvanskeligheder – er **stadig aktuelt**, men kan med fordel **udvides**
- **Detektionstest på klasseniveau** kan **pege på tværgående problemer og temaer**, der fortjener didaktisk/pædagogisk opmærksomhed
- **Klaus' brev**
- **Ditto på skoleniveau**
- **Detektionstest på tværs af klasser** kan **inspirere til lærersamarbejder og –indsatser**
- **Ditto i lokalområdet på tværs af skoler**
- **Ditto nationalt**

- **Detektionstestopgaver** kan **bruges i den konkrete undervisning**: dybtgående behandling af opgavesvarmuligheder, både korrekt og forkerte.

Eksempel fra Sverige (Linda Ahl og Ola Helenius):

- Giv **en håndfuld detektionstestopgaver til en klasse** og bed eleverne om at **arbejde med dem i små grupper**.
- Bed grupperne om at **præsentere deres resultater for klassen**, og lad klassen **diskutere** besvarelserne og **nå til enighed** om acceptable svar.
- Bed eleverne i klassen om at **foreslå generaliseringer af spørgsmål eller resultater**.

Tak for opmærksomheden! ☺

Workshop I, Slagelse 4., Aalborg 5. december 2025:

Spørgsmål til diskussion i mindre grupper. Forhold jer venligst til **alle tre spørgsmål**.

- **Spørgsmål 1**: Hvad er i jeres øjne **de tre væsentligste udfordringer** i matematikundervisningen **ved overgangen** fra grundskole til gymnasiale uddannelser?
- **Spørgsmål 2**: Synes I, at **detektionstestspørgsmålene** **fanger noget centralt** ved matematisk kompetence i jeres skoleform, eller er der mest tale om ”luksusspørgsmål”? **Hvor vigtige** er sådanne spørgsmål for jeres arbejde som matematiklærere?
- **Spørgsmål 3:** Som beskrevet kan detektionstest bruges til forskellige formål. **Kan I, i jeres undervisning, bruge dem til formål, som I finder vigtige?** I så fald, **hvilke?**

Udfordring

- **Komponér** i grupper på hver maks. 3 personer en **ny detektionstestopgave**, der egner sig til et eller flere af **de niveauer I på underviser på**!