Dette dokument er jeres svar-ark. Start med at gemme det (evt. bare på skrivebordet) under navnet: fornavn1 og fornavn2.

I skal klippe ind fra TI-$n$spire, skrive og svare direkte i dette dokument. Hvis I tegner eller skriver noget I hånden, skal I tage et billede af det og sætte ind i dette dokument, tak ☺

Fornavne:\_\_\_\_\_\_\_\_

Til slut skal I gemme dokumentet sammen med jeres screencast i en mappe på Mathildes harddisk.

## Opgave 1: rette linjer

1. Beskriv, hvad I forstår ved det matematiske begreb hældning.
2. I TI-$n$spire dokumentet ”E2021” under **Opgave 1b** ses grafen for en lineær funktion. Undersøg hældningen for denne.
3. I TI-$n$spire dokumentet under **Opgave 1c** ses tre grafer for lineære funktioner (en blå, en orange og en grå). Diskutér, hvilken af disse tre grafer, der er stejlest, og hvilken rolle begrebet hældning spiller her.

## Opgave 2: krumme kurver

1. Vil I mene, at vi kan tale om, hvor stejle ikke-lineære funktioner er? Hvorfor / hvorfor ikke. Giv gerne et par eksempler.
2. I TI-$n$spire dokumentet under **Opgave 2** ses grafen for den ikke-lineære funktion

$f\left(x\right)=-0,1\left(x+3\right)\left(x+2\right)\left(x+5\right)$ for $-6\leq x<4$

Derudover ses en ret linje, der går gennem punkterne $\left(x\_{0},f\left(x\_{0}\right)\right)$ og $\left(x\_{0}+Δx, f\left(x\_{0}+Δx\right)\right)$. Denne rette linje kaldes en sekant. Værdien $a\_{s}$ angiver sekantens hældning.

Værdien for $x\_{0}$ på $x$-aksen kan ændres ved at flytte på den tilhørende skyder $x0$.
Værdien $Δx$ kan ændres ved at flytte på den tilhørende skyder $dx.$

Prøv at flytte på $x\_{0} (x0)$ og $Δx (dx)$ og forklar, hvad der sker, og hvordan det påvirker sekantens hældning ($a\_{s})$. Giv gerne eksempler.

1. Prøv at bruge sekanten, ved at flytte på skyderne til $x\_{0} (x0)$ og $Δx (dx)$, til at svare på følgende spørgsmål. Giv gerne eksempler.
* Hvor er kurven stejl, og hvor er den flad?
* Kan vi sige noget om, hvor stejl kurven er i et bestemt punkt?
* Hvor stejl ville kurven være i fx $x\_{0}=-1$?
* Kan vi sige noget om, hvor stejl kurven er i endepunkterne?
1. Find selv på 3 yderligere spørgsmål og deres eventuelle svar.
2. Overvej, hvorfor sekanten kan hjælpe os til at undersøge den ikke-lineære kurve.

## Opgave 3: sekant- og tangenthældning

Med en tangent kan vi afgøre, hvor stejl en kurve er i præcis ét punkt.

En tangent er en ret linje, der tangere grafen i ét punkt.

Det vigtige er, at have det enkelte punkt for øje.



Men hvordan finder vi så tangenten til en kurve? 

– Det er hvad de næste opgaver skal hjælpe os med.

1. I TI-$n$spire dokumentet under **Opgave 3** ses grafen for funktionen $f$ givet ved

$$f\left(x\right)=\left\{\begin{array}{c}\left(x+3\right)^{2}-2,4, \&-6<x\leq -4\\-0,1⋅\left(x+5\right)⋅\left(x+2\right)⋅\left(x-3\right), \&-4<x\leq 1\\3,6, \&-1<x<6\end{array}\right.$$

|  |  |
| --- | --- |
| $$Δx>0$$ | $$a\_{s}$$ |
| $$0,05$$ |  |
| $$0,04$$ |  |
| $$0,03$$ |  |
| $$0,02$$ |  |
| $$0,01$$ |  |
| $$Δx<0$$ |  |
| $$-0,05$$ |  |
| $$-0,04$$ |  |
| $$-0,03$$ |  |
| $$-0,02$$ |  |
| $$-0,01$$ |  |
| Et bud på hældning til tangenten kunne være |  |

Derudover ses en sekant, der skærer grafen i de
to punkter $\left(x\_{0},f\left(x\_{0}\right)\right)$ og $\left(x\_{0}+Δx, f\left(x\_{0}+Δx\right)\right)$.

1. Sæt $Δx=0$ ved at skrive $dx=0$ i den
tilhørende skyder og giv et bud på,
hvorfor sekanten forsvinder.
2. Udfyld tabellen til højre for $x\_{0}=-1,5$,
og giv et bud på, hvad hældningen til tangenten
(der akkurat tangerer i $x\_{0}$) kunne være.
3. Kopier tabellen og gør tilsvarende for $x\_{0}=1$, hvor I selv bestemmer
værdierne for $Δx$, og giv et bud på, hvad hældningen
til tangenten kunne være her.
4. Kopier tabellen og gør tilsvarende for $x\_{0}=-4$, hvor
I selv bestemmer værdierne for $Δx$, og giv et bud på,
hvad hældningen til tangenten kunne være.
5. Sekantens hældning $(a\_{s}) $er givet ved udtrykket
$\frac{f\left(x\_{0}+Δx\right)-f\left(x\_{0}\right)}{Δx}$. Giv et bud på hvorfor.

Figure - Tabel til opgave 3c

Hvis sekanternes hældning nærmer sig den samme værdi for positiv og negativ $Δx$ (dvs. for $Δx>0$ og $Δx<0$), så siger vi, at *sekantens hældning går mod tangentens hældning for* $Δx$ *gående mod 0.*

Dette kan skrives således:

$$\frac{f\left(x\_{0}+Δx\right)-f\left(x\_{0}\right)}{Δx}\rightarrow A\_{0} for Δx\rightarrow 0$$

Hvor $A\_{0}$ er reelt tal, der angiver tangentens hældning.

Hvis sekantens hældning ikke går mod den samme værdi for $ Δx>0$ og $Δx<0$, så siger vi, at $A\_{0}$ ikke eksisterer og at grafen ikke har en tangent i det undersøgte punkt.

1. Hvad vil I mene værdien $A\_{0}$ er i opgave 3c, d, e, hvis den overhovedet eksisterer?
2. Prøv at se på funktionsforskriften, hvorfor tror I, det er $x\_{0}=-4$ og $x\_{0}=1$, der kan være interessante at undersøge?

## Opgave 4: differentiabilitet

Tangentens hældning i et givent punkt, dvs. værdien $A\_{0}$ kan bestemmes ved hjælp af differentialregning.

**DEFINITION:** Lad $f$ være en funktion defineret på et interval $I$ og lad $x\_{0}$ tilhøre $I$. Hvis

$$\frac{f\left(x\_{0}+Δx\right)-f\left(x\_{0}\right)}{Δx}\rightarrow A\_{0} for Δx\rightarrow 0$$

hvor $A\_{0}$ er et reelt tal, så siges $f$ at være **differentiabel** i $x\_{0}$ med differentialkvotient $A\_{0}=f'(x\_{0})$.

Hvis der til ethvert $x\_{0}$ tilhørende $I$ eksisterer et tilsvarende $A\_{0}$, så er $f$ differentiabel med differentialkvotient $f^{'}\left(x\right)$ i hele intervallet $I$.

Her angiver $\frac{f\left(x\_{0}+Δx\right)-f\left(x\_{0}\right)}{Δx}$ igen sekantens hældning $a\_{s}$ (se opgave 3f).
$A\_{0}$ (og dermed udtrykket $f'\left(x\_{0}\right)$) vil dermed være tangentens hældning, hvis denne eksisterer.

1. Overvej og prøv at forklare, hvad det vil sige, at ”$x\_{0}$ tilhører intervallet $I$”. Se evt. på funktionsforskriften i **opgave 3**.
2. Undersøg ved hjælp af ovenstående definition og sekanten om funktionen i **opgave 3** er differentiabel i $x\_{0}=-4$, $x\_{0}=-1,5$ og $x\_{0}=1$.
3. Sammenlign jeres svar fra opgave 4b med jeres svar fra opgave 3c, d, e og g.
4. Vurdér om funktionen er differentiabel i hele intervallet $]-6;6[$.
5. I TI-$n$spire under **Opgave 4d-f** ses en grafen for funktionen $f$ givet ved

$$f\left(x\right)=\left\{\begin{array}{c}-0,1⋅\left(x+5\right)⋅\left(x+2\right)⋅\left(x-3\right), \&-6<x\leq 1\\-0,1x^{2}+3,7, \&-1<x<8\end{array}\right.$$

1. Undersøg ved hjælp af ovenstående definition og sekanten om funktionen er differentiabel for $x\_{0}=-3,67$ og $x\_{0}=1$.
2. Vurdér om funktionen er differentiabel i hele intervallet $]-6;8[$.

## Opgave 5: Differentialkvotienten

1. I TI-$n$spire under **Opgave 5a-d** ses grafen fra Opgave 4 igen. Denne gang uden sekanten. Tilføj en ny side med et noteark og et matematikfelt. Her kan I få funktionsforskriften frem, ved at skrive $f1(x)$.
Matematikskabelonen kan bestemme differentialkvotienten.
Prøv fx at skrive: $\frac{d}{dx}\left(f1\left(x\right)\right)|x=-1,5$ i et matematikfelt. Sammenlign resultatet med jeres undersøgelse fra Opgave 4, og giv et bud på, hvad dette resultat betyder.
2. Gør det samme for $x=-4$ og $x=1.$
3. Vurdér om funktionen er differentiabel i hele intervallet $]-6;8[$.
4. Overvej, om en funktion, som er differentiabel på et åbent interval fx $]-6;1[$ stadig er differentiabel på hele intervallet, hvis det er et lukket interval fx $\left[-6;1\right].$
5. I TI-$n$spire under **Opgave 5e** sesgrafen for funktionen $f$ givet ved

$$f\left(x\right)=\left\{\begin{array}{c}4x+2, \&-1<x\leq 0\\-0,5x^{2}+4x+2, \&-0<x\leq 4\\0,1x+9,6, \&-4<x<10\end{array}\right.$$

Brug 3 minutter på at overveje, hvordan I vil undersøge om funktionen er differentiabel.

Stil jer selv 3-5 spørgsmål, I vil undersøge for at finde ud af, om funktionen er differentiabel.

Undersøg nu om funktionen er differentiabel.

## Opgave 6: Differentiable og ikke-differentiable funktioner

1. Forklar med egne ord, hvornår en funktion er differentiabel.
2. Forklar med egne ord, hvornår en funktion ikke er differentiabel.
3. Konstruér selv en funktion, der er differentiabel og én, der ikke er differentiabel.
4. Undersøg og forklar hvorfor funktionen givet ved $f\left(x\right)=\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{x}, \&x\ne 0\\0, x=0\end{array}\right.$ *ikke* er differentiabel, men at funktionen $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$ er differentiabel. (Hint: Gå tilbage til definitionen og overvej betydningen af intervallet $I$, som funktionen er defineret på)
5. Konstruér selv en funktion, der er kontinuert, men ikke differentiabel.
6. Konstruér selv en differentiabel funktion, bestående af to typer funktioner.
7. Alle de funktioner, vi har arbejdet med indtil nu er enten stykvise kontinuerte eller stykvise differentiable. Kan I forestille jer en funktion, der er alle steder kontinuert, men ingen steder differentiabel? Hvordan kunne sådan en funktion se ud.