Her kommer et bud på hvad der for mig at se er hovedsagen – og de dertil knyttede vanskeligheder – i hver opgave. Dette sker ved reference til de forskellige faser i modelleringscyklen. Læg venligst mærke til at min analyse går på hvad der på ”vores niveau” skal til for at løse opgaven: Jeg regner selvsagt ikke med at eleverne opfører sig i overensstemmelse med analysen på alle punkter.

Mogens

# 13 Spørgsmål fra Professoren

Her er 13 spørgsmål fra professoren. Det er meget vigtigt for vores undersøgelse, at du svarer på alle spørgsmålene, også hvis der skulle være nogle du ikke synes du kan gøre noget ved. På forhånd stor tak for hjælpen!

### Spørgsmål 1

Hans kan gå fra Roskilde Station til Roskilde Domkirke på 6 minutter. Grethe skal bruge 8 minutter. Hvor lang tid tager det, hvis de følges ad? Begrund dit svar.

Det følgende kan forekomme overdrevent pedantisk, for ikke at sige komisk. Men nu og da kan det måske være oplysende at analysere selv det åbenbare.

***Opgavens kerne*** er ***præmatematiseringen***: Der indgår ingen empiriske data om hvor lang tid det tager forskellige mennesker, herunder Hans og Grethe, at tilbagelægge strækningen. De gjorte forudsætninger - at G skal bruge (mindst) 8 min., og at H og G skal følges ad – er dermed ikke til diskussion. Det antages, ud fra kendskab til konsekvenserne af disse forudsætninger, at hvor G ikke kan sætte sit tempo op, kan H sætte sit ned. Det er altså den langsomste der bestemmer farten. Hvis opgaven volder vanskeligheder, er det i denne afkodning af opgavesituation og –formulering, som forudsætter, at opgaven tages for pålydende og ikke ses som anledning til at udføre ubegrundede aritmetiske operationer på 6 og 8.

Resultatet af præmatematiseringen er, at *matematiseringen* koges ned til at oversætte 6 min., hhv. 8 min. til tallene 6 og 8, hvor det matematiserede problem er at bestemme det største af de to tal.

Der er ingen reel *matematisk problemløsning* på færde, eftersom det jo er klart for alle at 6 < 8. Den matematiske løsning er altså tallet 8. *Afmatematiseringen* består så i at sætte enhed på og derved opnå real-world svaret 8 min.

En *validering* af modelresultatet (som der ikke er meningsfuld basis for i testen), ville i givet fald kunne bestå i at skaffe en sværm af data på Hans og Grethes faktiske tempi i den betragtede vandring, for derved at undersøge holdbarheden af de gjorte forudsætninger og konsekvenserne heraf for modelleringen.

### Spørgsmål 2

Du er ved at lave din egen dressing til en salat. Her er en opskrift på 100 milliliter (ml) dressing.

| | |
|---|---|
| Salatolie | 60 ml |
| Eddike | 30 ml |
| Soyasauce | 10 ml |

Hvor mange ml salatolie skal du bruge for at lave 150 ml af denne dressing? Begrund dit svar.

Ad *præmatematisering*: Vi skal lave "den samme dressing" i et volumen der er 50 ml større end det oprindelige. At der er tale om "den samme dressing" betyder – forudsætter vi – dels at den laves af de samme ingredienser, dels at forholdene mellem ingredienserne er de samme for det større kvantum. Det skal så, jf opgaveformuleringen, afgøres hvilke konsekvenser det har for oliemængden.

***Matematiseringen***, som udgør denne ***opgaves kerne***, består i at oversætte salatforholdet for 100 ml til salatforholdet for 150 ml til matematik. Det sker ved at sige, at alle ingrediensmængder skal skaleres med faktoren 3/2 (eller - ækvivalent – at vi lægger halvdelen, eller 50%, til). Matematiseringen fører til 60·(3/2) (alias 60 + 60/2).

Den *matematiske problemløsning* koges ned til blot og bar udregning af 60·(3/2) = 90, eller 60+60/2 = 60 + 30 = 90. Selve disse udregninger antages ikke at volde kvaler for gymnasieelever.

*Afmatematiseringen* består blot i at tilføje en enhed: Svaret i virkelighedsdomænet er 90 ml.

Hvis modelresultatet skulle *valideres* ved konfrontation med virkeligheden, skulle det ske ved at man lavede to dressinger på hhv. 100 ml og 150 ml med de skalerede, men i øvrigt kvalitativt identiske, ingredienser og satte kyndige smagere til at prøvesmage, om de faktisk smagte ens. Det er næppe praktisk muligt inden for testens rammer ☺.

## Spørgsmål 3

Søren vil sætte sine sparepenge i banken. Banken ***Tæsk*** tilbyder 0,25 % i rente hvert kvartal, hvis han lader pengene stå i 2 år. Banken ***Bank*** tilbyder 1% i årlig rente, hvis han lader pengene stå i 2 år. Er det ligegyldigt hvilken bank Søren vælger, eller har han fordel af at vælge den ene frem for den anden? Begrund dit svar.

*Præmatematisering*: Det først fornødne er at forstå den nominelle forskel på T's og B's tilbud. Under den fælles forudsætning, at pengene står i 2 år, tilbyder T rentetilskrivning hvert kvartal, altså fire gange om året, med en kvartalsrentesats på 0,25%, B hvert år, men med fire gange så stor rentesats, af de til terminerne indestående beløb. Realitetsspørgsmålet er så, om de to ordninger giver de samme eller forskellige resultater.

*Matematisering*: Med et indskud på S kr. ville Søren have $S \cdot 1{,}0025^8$ kr. stående efter to år i T, men $S \cdot 1{,}01^2$ i B. Det *matematiserede spørgsmål* er så, om $S \cdot 1{,}0025^8$ =, <, > $S \cdot 1{,}01^2$.

*Matematisk problemløsning*: Ved forkortning med S fås det ækvivalente spørgsmål: Hvilket tegn skal sættes i $1{,}0025^8$ =, <, > $1{,}01^2$? Dette spørgsmål kan besvares ved hjælp af en lommeregner, uberørt af menneskeånd. Derved bliver den matematiske problemløsning reelt varetaget af en anden instans end eleven. Formentlig vil de fleste elever gribe til dette middel.

Man kan imidlertid også forestille sig en ”kvalitativ løsning” af det kvantitative problem. I bank T vil indeståendet efter 1. kvartal være $S\cdot 1{,}0025$ kr. Det ville det også nominelt være i bank B. Efter yderligere et kvartal, vil indeståendet i T være $S\cdot 1{,}0025^2$, fordi der indgår renters rente, men i B $S\cdot 1{,}005$, der er mindre end $S\cdot 1{,}0025^2$ (= $S\cdot(1+ 0{,}005 + 0{,}0025^2) = 1{,}005 + 0{,}0025^2$). Denne forskel bliver blot tydeligere, jo flere kvartaler der går. Altså er $S\cdot 1{,}0025^8 > S \cdot 1{,}01^2$. Nogle elever vil sikkert ræsonnere sådan, men nok i løsere form.

En skarpere matematisk problemløsning kunne se sådan ud: Da alle størrelser er positive, er kvadratrodsuddragning lovlig. Herved fås et simplere ækvivalent spørgsmål: Er $1{,}0025^4$ =, <, > 1,01? Dette spørgsmål kan besvares ved at se på det mere generelle spørgsmål (med $r > 0$): Er $(1+r)^4$ = , <, > $1+4r$? Da $(1+r)^4 = (1+2r+r^2)(1+2r+r^2) = 1+4r$ + et positivt tal $> 1+4r$ har vi svaret på spørgsmålet for vilkårlige $r > 0$, specielt for $r = 0{,}0025$. Det er næppe en urimelig antagelse at forestiller sig, at kun få elever vil gribe til denne løsning.

*Afmatematiseringen* består blot i at konstatere, med afsæt i resultatet af den matematiske problemløsning, at da $S\cdot 1{,}0025^8$ kr. > $S\cdot 1{,}01^2$ kr., er bank T’s tilbud det bedste.

Eftersom bankreglerne for forrentning af indskud på givne vilkår er udtryk for en stærk præmatematisering, der bevæger sig helt ind i matematiseringen, er modellen til sammenligning af de to tilbud en nødvendig matematisk konsekvens af vilkårene. Derved er modelresultatet *forhåndsvalideret*. Det kan i øvrigt noteres, at den sidste udgave af den matematiske problemløsning viser, at den opstillede model og konklusionerne af den uden videre kan generaliseres til at angå vilkårlige rentesatser, terminer og varigheder.

***Opgavens kerne*** ligger i den ***matematiske problemløsning***, men også til dels i ***matematiseringen.***

## Spørgsmål 4

På en bestemt skole er der 6 gange så mange elever som lærere. Opskriv en formel der udtrykker sammenhængen mellem antallet, $E$, af elever og antallet, $L$, af lærere. Begrund dit svar.

*Præmatematiseringen* er udført i opgaveformuleringen, derved at den eneste forudsætning på spil er formuleret mundtligt: 6 gange så mange elever som lærere.

***Matematiseringen***, som er ***opgavens kerne***, er delvis påbegyndt i opgaveformuleringen, derved at der er sat symboler på antallene af elever og lærere. Selve matematiseringen består i at omformulere oplysningen i opgaveteksten til ”antallet af elever, E, er lig 6 gange antallet af lærere, L” og oversætte dette til formlen $E = 6 \cdot L$, som fører ind i det matematiske domæne af naturlige tal med multiplikation som komposition. En vanskelighed her er, som vi ved, at rækkefølgen i formelopskrivningen (E,6,L) ikke modsvares af rækkefølgen i opgaveformuleringen (6,E,L), hvilket får mange elever til at benytte den sidste rækkefølge til i stedet at skrive: $6\cdot E = L$. I øvrigt er selve talemåden ”6 gange så mange elever som lærere” kun korrekt forståelig som netop en verbalt formuleret udgave af den matematisk model $E = 6 \cdot L$.

Der indgår *hverken matematisk problemløsning* eller *validering* af modelresultater, eftersom det kun er selve matematiseringen der efterspørges.

**Spørgsmål 5**

Se på billedet ovenfor. Hvor høj er den forreste bygning cirka? Begrund dit svar.

*Præmatematiseringen* rummer en del elementer. På grund af den forreste bygnings placering på en skrå vej er det ikke spor klart, hvad vi skal mene med bygningens højde. Faktisk har den forskellige højder, afhængigt af fra hvilket fodpunkt højden måles. Det er nødvendigt at idealisere situationen, sådan at højden fra et bestemt, endnu ikke valgt, fodpunkt kommer til at stå for højd**en** af bygningen. Fotoet er i perspektiv, hvorfor direkte måling på billedet ikke uden videre behandling kan forventes at føre til et brugbart resultat. Da vi kun har tilgang til længder gennem fotografiet, må vi betjene os af målestoksskalering for at nå frem til et estimat af bygningshøjden.

Som grundlag for modelleringen vælger vi at benytte højden af den person ("personen i den røde sweater"), der er tættest på bygningen, som målestok. For at tage højde for den perspektiviske effekt, må bygningshøjden estimeres på det sted, personen står. Ved hjælp af en lineal måles dennes højde på billedet og bygningens højde på det sted hvor personen står, begge dele i cm. Det antages at forholdet mellem bygningens billedhøjde og personens billedhøjde er det samme som forholdet mellem bygningens virkelige højde og personens virkelige højde, begge målt i meter. Vi foretager et forhåndsgæt på personens virkelige højde, fx 1,80 m.

*Matematiseringen* består nu i dels at indføre bygningens billedhøjde b og dens reelle højde B, dels personens billedhøjde h og reelle højde H. Vores præmatematiserede antagelse matematiseres dernæst til $B/H = b/h$, dvs. $B = (b/h)\cdot H$. Det matematiske domæne er de rationale tal udstyret med de sædvanlige kompositioner.

Den *matematiske problemløsning* består i at indsætte de fundne værdier af b og h og den gættede værdi af H og deraf bestemme B gennem regninger inden for de rationale tal.

*Afmatematiseringen* går så ud på at tilføje enheden meter til den fundne værdi af B.

*Valideringen* af modelresultatet kan bestå af flere dele. For det første kan man konstatere, at bygningen består af fire overetager og en stueetage, adskilt af fire dæk. Sjusser vi ud fra virkelighedskendskab, at hver af de fire etager er 2,5m høj, mens stueetagen er 3 m høj, og at hvert af de fire dæk er 0,5 m højt, fås et sjus på den samlede højde på $5\cdot 3 = 15$ m. Det kan bruges som et groft realitetscheck i forhold til modelresultatet. I tekstens kontekst er dette nok den eneste mulige validering, evt. suppleret med et usikkerhedsoverslag.

For det andet kan man – men næppe i opgavens kontekst - undersøge effekten af usikkerhed på personens højde H (mens vi vælger at se væk fra måleusikkerheder i forbindelse med opmålingen på billedet). Antager vi at personens højde ligger i intervallet $(H-\Delta H, H+\Delta H]$, ligger B i intervallet $[(b/h)H - (b/h)\Delta H, (b/h)H + (b/h)\Delta H]$ m, dvs. usikkerheden på bestemmelsen af bygningshøjden er $\pm(b/h)\Delta H$, altså relativt $\pm [(b/h)\Delta H/ (b/h)H)] = \pm \Delta H/H$, Dvs. den samme relative usikkerhed på bestemmelsen af bygningens højde som på bestemmelsen af personens højde.

Det fremgår at ***hele modellerinscyklussen*** er i spil i denne opgave.

## Spørgsmål 6

Et oliefelt indeholder 100 millioner tønder olie. Ali siger, at hvis man hvert år udvinder 1 million tønder olie, slipper olien op efter 100 år. Aya siger, at hvis man hvert år udvinder 1% af den olie, der er tilbage, slipper olien aldrig op. Hvem har ret og hvorfor?

*Præmatematisering:* Alis og Ayas synspunkter er baseret på *to forskellige modeller* for olieudvindingen. Man skal derfor ikke tage stilling til, om den ene model er mere korrekt eller rimelig end den anden, men til de konsekvenser Ali og Aya drager af deres respektive modeller. Alle kombinationer af at have ret/uret kan derfor tænkes.

I Alis tilfælde antages det, at der hvert år udvindes præcis 1 mio. tønder, hvilket – idealiseret - forudsætter at en sådan udvindingsform er mulig, uden usikkerheder af den ene eller den anden art, til den bitre ende. I Ayas tilfælde antages det, at man til enhver tid kan udvinde præcis 1% - det første år 1 mio. tønder - af restolien - uden usikkerheder og til den bitre ende. Det indgår desuden som idealiseret forudsætning i Ayas påstand om at olien aldrig slipper op, at der altid vil være en positiv mængde tilbage, hvoraf 1% kan tages, også hvis man på et tidspunkt når ned til blot ét oliemolekyle. I Ayas model forudsættes altså – idealiseret – at enhver positiv oliemængde er delbar.

*Matematisering*: Spørgsmålet om hvorvidt Ali har ret eller ej, kan matematiseres til ”Er det rigtigt, at $100 \cdot 10^6 - 100 \cdot 10^6 \leq 0$?”. Spørgsmålet om hvorvidt Aya har ret kan (fx) matematiseres således: Lad os kalde oliereserven efter n år for $r_n$. ”Er det så rigtigt, at $r_n > 0$ for alle n, når $r_0 = 100 \cdot 10^6$, og $r_{n+1} = r_n - r_n \cdot 0.01 > 0$, uanset hvad n er?”. Denne formelle matematisering af Ayas påstand må antages at være ret krævende for gymnasieelever, og vil næppe blive opnået af mange elever. En løsere matematisering af den samme tankegang, men inden for rækkevidde kunne lyde: ”Er det rigtigt, at hvis $r > 0$, er også $r - 0{,}01 \cdot r > 0$?”.

*Matematisk problemløsning*: Spørgsmålet vedrørende Alis matematiserede påstand checkes ved simpelthen at konstatere, at $100 \cdot 10^6 - 100 \cdot 10^6 = 0$, hvilket bekræfter påstanden. Ayas formelt matematiserede påstand checkes ved induktion: $r_1 = 100 \cdot 10^6 - 100 \cdot 10^6\, 10^{-2} = 100 \cdot 10^6 (1 - 10^{-2}) > 0$. Hvis $r_n > 0$, må også $r_{n+1} = r_n - r_n \cdot 0.01 = r_n (1 - 0.01) > 0$. I kraft af induktionsprincippet er så alle $r_n$ positive. Dette argument vil antagelig ingen elev (kunne) levere. Checkningen af den løst matematiserede udgave af Ayas påstand, er umiddelbar og tilgængelig for typiske elever: ja, når $r > 0$ er også $r - 0{,}01r = r(1-0{,}01) > 0$, eftersom produktet af to positive tal er positivt. I alle fald er svaret på Alis og Ayas matematiserede påstande ”ja!”.

*Afmatematisering*: Med svaret på de matematiserede spørgsmål i hånden, kan vi konkludere, at Ali og Aya begge har ret under de anførte forudsætninger. Som sagt er det ikke overraskende, eftersom deres betragtninger refererer til to forskellige (udvindings)modeller.

*Validering*: Som anført går opgaven ikke ud på at tage stilling til de gjorte forudsætninger og modeller, men at tage stilling til påståede konsekvenser af dem. Skulle også modellerne og modelforudsætningerne valideres, stillede sagen sig helt anderledes. Så ville man skulle diskutere udvindingsmetoder, uendelig delbarhed etc.

***Kernen i denne opgave*** ligger i ***matematiseringen*** og den ***matematiske problemløsning***, selv om også præmatematisering og til dels afmatematisering er på tapetet

## Spørgsmål 7

På en ret stejl bakke i Athen findes en vej op, der er ca. 4 km lang. Rikke, som er i god form, kan bestige bakken med en gennemsnitsfart på 3 km i timen og gå ned igen med den dobbelte fart. Hvad er Rikkes gennemsnitsfart for den samlede tur? Begrund dit svar.

*Præmatematisering*: Opgaveformuleringen rummer vigtig præskriptiv modellering, nemlig begrebet gennemsnitsfart i forskellige aftapninger. De gjorte forudsætninger er, at Rikke går op ad bakken med 3 km i timen, ned ad bakke med 6 km i timen. Man må endvidere antage, at vejen ned er af samme længde (4 km) som vejen op, selv om der ikke står noget om at ruten er den samme. Ellers har opgaven intet fornuftigt svar. Der indgår ikke oplysninger om rutens stejlhed, slyngninger, ophold på toppen før nedturen etc. Det er alt sammen kogt ind i begrebet ”gennemsnitsfart”. Spørgsmålet der stilles, angår, hvad man kan sige om gennemsnitsfarten for den samlede tur, når man kender gennemsnitsfarten for de to delture.

***Matematiseringen*** *er* ***opgavens kerne***: Når R går op med 3 km/t tilbagelægger hun 1 km på 1/3 time, dvs. turen op tager 4/3 time. Når hun går ned med 6 km/t tilbagelægger hun 1 km på 1/6 time, dvs. turen ned tager 4/6 time. Derved går hun den samlede tur på 8 km på 4/3 + 4/6 time, dvs. gennemsnitsfarten for den samlede tur er 8/(4/3 + 4/6) =  km/t. Alternativt kan matematiseringen finde sted via minutbasis, dvs. 8 km tilbagelægges på 80 + 40 = 120 minutter, dvs. 2 timer.

*Matematisk problemløsning*: For at bestemme værdien af 8/(4/3+4/6) forlænges med 6, hvorved vi får 48/(8+4) = 48/12 = 4. I den alternative matematisering fås uden videre 8/2 = 4.

*Afmatematiseringen* består blot i at tilføje enheder: Gennemsnitsfarten for den samlede strækning er 4 km/t.

*Validering*: Som opgavens betingelser og forudsætninger foreligger, er der kun én mulig model, nemlig den foreliggende. Modellen og modelresultaterne kan altså betragtes som forhåndsvaliderede. Man kan naturligvis diskutere konsekvenserne af ændrede betingelser og forudsætninger, ligesom mulighederne for generalisering ligger lige for, men det vil ligge uden for testens rammer. Det vil sikkert komme bag på nogle, at gennemsnitsfarten for den samlede strækning ikke er gennemsnittet af gennemsnitsfarterne – det hyppigste empiriske fejlsvar. Det kunne tænkes at føre til en fornyet gennemgang af modelleringsskridtene og refleksion over hvoraf denne forskel kommer.

## Spørgsmål 8

Et pizzeria serverer to runde frokostpizzaer af samme slags og tykkelse, men i forskellig størrelse. Den mindste har en diameter på 30 cm og koster 30 kr. Den største har en diameter på 40 cm og koster 40 kr. Hvilken pizza giver mest for pengene? Vis, hvordan du kom frem til dit resultat.

*Præmatematisering*: Signalordene ”samme slags og tykkelse” peger på en præmatematisering, der idealiserer pizzaernes gastronomiske komposition. Vi forudsætter, at ”runde” betyder ”cirkulære” (der tales også om ”diameter” i formuleringen). Vi foretager nu yderligere den idealiserende antagelse, at pizzaernes indhold er jævnt fordelt over fladen, således at der ikke er en ufyldt dejring i yderkanten af pizzaerne, hvilket kunne have kompliceret modelleringen. Vi antager endelig, at spørgsmålet ”giver mest for pengene” skal fortolkes som ”mindste pris pr. pizzakvantum” (eller ækvivalent som ”største pizzakvantum pr. krone”).

*Matematisering*: Vi vælger at matematisere den enkelte pizza ved dens areal, dvs. den lille pizza ved $\pi\ 15^2$ ($cm^2$) og den store ved $\pi\ 20^2$ ($cm^2$), hvor værdierne for radierne fås fra de angivne diametre. Priserne pr. arealenhed er så henholdsvis $30/\pi\ 15^2$ og $40/\pi\ 20^2$, begge i kr/$cm^2$. Det matematiske univers er de (positive) reelle tal med de sædvanlige kompositioner og ordning. Det *matematiserede spørgsmål* er så: Gælder $30/\pi\ 15^2 < 40/\pi\ 20^2$ eller $30/\pi\ 15^2 > 40/\pi\ 20^2$, evt. lighedstegn?

*Matematisk problemløsning*: De to uligheder er – ved forlængning med $\pi$ og udregning og forkortning med de naturlige tal – ækvivalente med ulighederne 2/15 < 1/10 og 2/15 > 1/10, hvoraf den anden holder. Vi konkluderer altså, at $30/\pi\ 15^2 > 40/\pi\ 20^2$.

*Afmatematematisering*: Som så ofte foregår afmatematiseringen ved at der først tilføjes enheder, så vi opnår $30/\pi\ 15^2$ kr/$cm^2$ > $40/\pi\ 20^2$ kr/$cm^2$. M.a.o. den lille pizza er dyrere pr. areal (volumen) end den store. Den store giver altså mest for pengene.

*Validering*: De gjorte forudsætninger og antagelser er ganske indsnævrende. Hvis de tages for givne, følger modellen og dens konklusioner med logisk nødvendighed. Det vil imidlertid være let at modificere forudsætninger og antagelser såvel som realitetsspørgsmålet ved at antage at fyldet kun når til fx 2 cm fra randen og så spørge hvilken pizza der giver mest for pengene, hvis prisen pr. arealenhed for den fyldte del af pizzaen er målekriteriet. Det ville give anledning til en let modificeret model.

I denne opgave er ***hele modelleringscyklussen*** på banen.

**Spørgsmål 9**

I landet *Zedland* er der to aviser, der søger sælgere. Annoncerne nedenfor viser, hvordan de betaler deres sælgere.

**ZEDLAND POSTEN**

*BRUG FOR EKSTRA PENGE?*

*SÆLG VORES AVISER*

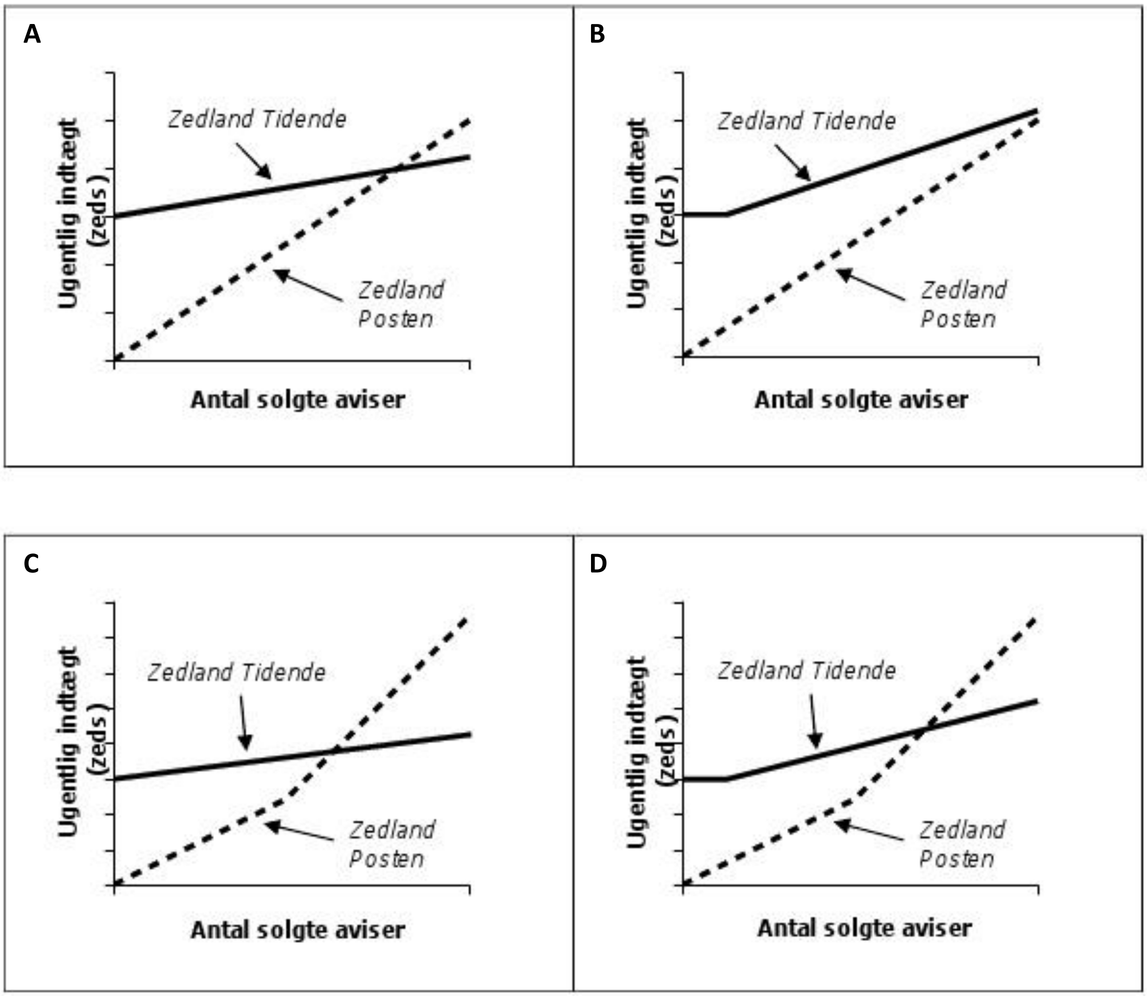
Du vil blive betalt: 0,20 zeds pr. avis for de første 240 aviser, du sælger på en uge, plus 0,40 zeds for hver ekstra avis, du sælger.

**ZEDLAND TIDENDE**

*GODT BETALT JOB, DER IKKE TAGER LANG TID!*

Sælg *Zedland Tidende* og tjen 60 zeds om ugen, plus ekstra 0,05 zeds pr. avis du sælger.

John beslutter sig for at søge en stilling som avissælger. Han skal vælge mellem *Zedland Posten* og *Zedland Tidende*. Hvilken af de følgende grafer (A, B, C eller D) er en korrekt fremstilling af, hvordan de to aviser betaler deres sælgere? Begrund dit svar.




*Forord*: I denne opgave foreligger der fire forskellige matematiske modelpar – i form af par af funktionsgrafer - til at repræsentere en situation, og opgaveløseren skal vælge mellem dem. For at kunne foretage dette valg må man udføre dele af modelleringscyklussen (hvilket er raffinementet i opgaven, som er en frigivet PISA-opgave), men flere dele bliver rudimentære, idet man hverken selv udtrykkeligt skal opstille en model eller drage konklusioner om virkeligheden ud fra den. Nedenfor gennemløbes imidlertid hele cyklussen for analysens skyld.

*Præmatematisering*: Da aflønningsbetingelserne på de to avisansættelser er klart og udtømmende beskrevet, er præmatematiseringen med beløb, antal og tidsskala allerede fuldført. Man kan skride direkte til matematiseringen.

*Matematiseringen* er til dels fuldført i opgaven (i grafisk form): ZPs aflønning matematiseres med funktionsforskriften: $l_P(x) = 0{,}2x$ for $0 \leq x \leq 240$, og $l_P(x) = 0{,}2 \cdot 240 + 0{,}4(x-240)$ for $x > 240$. Det matematiske domæne er reelle funtioner defineret på den ikke-negative halvakse. I mere kvalitativ form kan ZPs aflønning matematiseres grafisk som en stykkevis lineær funktion, først med grafen gennem origo med én hældningskoefficient, derefter med grafen gennem (240,48) med en større hældningskoefficient.

ZTs aflønning matematiseres med forskriften $l_T(x) = 60 + 0{,}05x$, $x \geq 0$. Det matematiske domæne er lineære funktioner af ikke-negativ variabel. I mere kvalitativ form kan ZTs aflønning matematiseres grafisk som en lineær funktion med grafen gennem (0,60) og med positiv hældningskoefficient.

*Matematisk problemløsning og afmatematisering*: Der foreligger ikke nogen matematisk problemløsning, eftersom man ikke ved hjælp af modellerne skal nå frem til konklusioner vedrørende det modellerede område. Af samme grund foreligger der heller ikke nogen afmatematisering af de opnåede konklusioner, eftersom der ikke er nogen.

Bemærkning: Opfatter man – hvilket giver god mening – funktionsforskrifterne som den egentlige matematisering, vil opstillingen af grafrepræsentationerne for funktionerne være at betragte som resultatet af matematisk problemløsning. Denne problemløsning angår dog ikke bestræbelserne på at finde afmatematiserbare svar på spørgsmål fra virkelighedsdomænet, men blot en matematikintern transformation af den symbolbaserede matematisering til en grafisk. Derfor er der fortsat ikke nogen afmatematisering på banen.

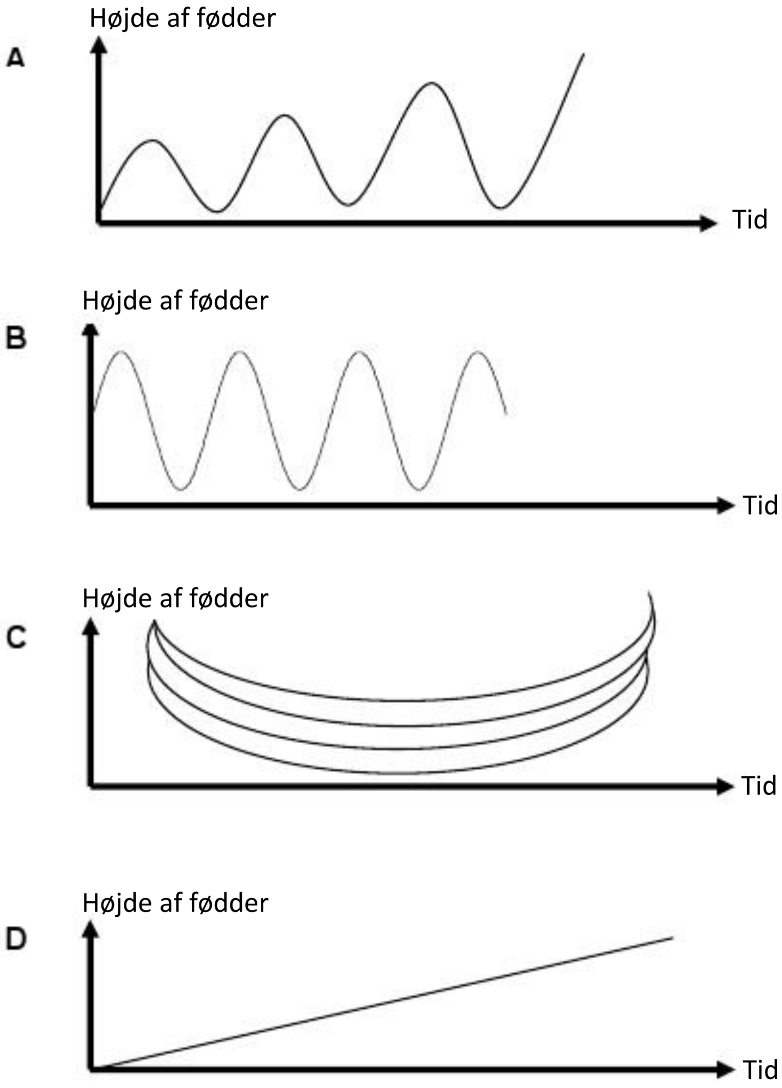
*Valideringen* består i en konfrontation af de fire foreslåede modelpar (i form af grafrepræsentationer af de matematiserede aflønningsordninger) med de to beskrevne aflønningsordninger, med henblik på at afgøre hvilket (om noget) af de fire modelpar der (bedst) modsvarer de beskrevne ordninger. Uanset om matematiseringen er sket formelt eller kvalitativt, er det kun modellerne bag C og D der giver en korrekt repræsentation af ZPs aflønningsordning. På tilsvarende måde er det kun modellerne bag A og C der giver en korrekt repræsentation af ZTs ordning. I alt er det kun figur C der korrekt repræsenterer både ZP og ZT.

***Denne opgaves kerne er validering*** af de fire modelpar. Eftersom valideringen forudsætter formel eller kvalitativ matematisering, som ovenfor, indgår også ***matematiseringen*** i opgavens kerne, men i en afledet rolle som hjælpetrop for valideringen.

## Spørgsmål 10

Mohammed sidder på en gynge. Han begynder at gynge. Han forsøger at komme så højt op som muligt.

Hvilken af følgende grafer (A, B, C eller D) afbilder bedst højden af hans fødder over jorden mens han gynger? Begrund dit svar.




*Forord*: Denne opgave minder strukturelt set om den foregående, idet opgaveløseren skal vælge mellem fire grafiske repræsentationer af foreslåede kvalitative modeller der hver for sig skal indfange fodhøjden som funktion af tiden i en gyngetur, hvor man forsøger at komme højere og højere.

*Præmatematisering*: Der er allerede set væk fra mange ting: gyngens placering og dimensioner, herunder højden over jorden; tidsforløbet; og frem for alt de skiftende benstillinger hos gyngeren som er nødvendige for at få gyngen højere og højere op. Det er kun forløbet op mod stadig større gyngehøjde der søges indfanget, ikke forløbet ned mod stop. Idealiseringen er altså ganske vidtgående. Ikke desto mindre skal modelbygningen finde sted under inddragelse af betydelig hverdagsviden om, hvordan et gyngeforløb udspiller sig i virkeligheden.

*Matematisering*: Under en gyngetur har fødderne forskellige højder over jorden, alt efter hvor personen er i et sving. Den søgte funktion må altså udvise oscillationer. Hver gang man under en gyngetur når gyngens laveste position – som man også indtager ved starten – har (antager vi) fødderne den samme positive højde over jorden. Eftersom gyngen når højere og højere, må oscillationernes lokale maksima blive større og større.

*Matematisk problemløsning og afmatematisering* optræder ikke, eftersom der ikke skal drages matematiske konklusioner og udføres fortolkninger af disse for gyngevirkeligheden

***Opgavens kerne er valideringen*** og den kvalitative modellering, der skal til for at foretage den. Vi lægger ud med straks at kassere graf C, eftersom der ikke her er tale om én matematisk model. Havde vi kun haft én af buerne (og havde set væk fra at de alle har lidt modløb i endepunkterne), kunne det med nogen god vilje være kommet på tale at tænke på den som en graf for et forløb mellem to lokale maksima. Den ville så ikke have indfanget at gyngen øgede sin højde med tiden. Med henvisning til de nødvendige kvalitative egenskaber ved modellen som vi fandt under matematiseringen, kan vi derefter konstatere, at graf D ikke kan komme på tale. Kun graferne A og B udviser de krævede oscillationer, og af disse udviser kun graf A voksende lokale maksima. Kun modellen i graf A repræsenterer i tilfredsstillende grad de anførte oplysninger og krav.

## Spørgsmål 11

En træterning med alle sider lig 2 cm vejer 4,8 gram. Hvad vejer en træterning, hvor alle siderne er 4 cm? Begrund dit svar.

*Præmatematiseringen* er næsten fuldført alene derved, at der tales om en ”terning”, som pr. automatik giver anledning til en bestemt geometrisk model. Der burde i øvrigt have stået ”kanter” i stedet for ”sider”, men det giver næppe anledning til misforståelser. Det er dog nødvendigt yderligere at gøre den forudsætning, at den nye terning er af samme materiale som den gamle (det burde der også have stået), og at massetætheden (densiteten) er homogen, altså den samme for enhver (nok så lille) del af terningen.

*Matematisering*: Vi antager, at forholdet mellem vægt M og volumen V af den store terning er det samme som for den lille terning, m/v. Vi matematiserer så den store ternings vægt ved M/V = m/v, dvs., M = (m/v)V.

*Matematisk problemløsning*: Den lille ternings volumen er v = $2^3$, mens m var opgivet til 4,8. Da den store ternings kantlængder alle er dobbelt så store som den lilles er V = $2^3$v = $8^2$. Ergo er M =(4,8/8)·$8^2$ =4,8·8 = 38,4.

*Afmatematisering*: Den matematiske problemløsning foregik med rene tal. Vi skal blot tilføje enheder for at få oversat svaret til virkelighedsdomænet: 38,4g.

*Validering*: Det er ikke muligt at foretage en yderligere validering af modelresultatet inden for den foreliggende ramme, eftersom det følger med nødvendighed af de gjorte forudsætninger og antagelser. En ”real-world”-validering ville kræve eksperimenter med faktiske træterninger, og ville i realiteten udfordre de gjorte forudsætninger og antagelser: at der virkelig er tale om to *terninger*, at de er skabt af det samme træ, og at densiteten er homogen.

***Kernen i opgaven*** ligger samspillet mellem ***matematisering*** og ***matematisk problemløsning***.

**Spørgsmål 12**

Før i tiden antog man, at sammenhængen mellem en persons maksimale hjertefrekvens og personens alder (målt i år) kunne beskrives ved følgende formel (hvor der ses væk fra enheder):

$$\textit{maksimal hjertefrekvens} = 220 - \textit{alder}.$$

Senere forskning viste, at denne formel burde ændres en smule. Den nye formel er som følger:

$$\textit{maksimal hjertefrekvens} = 208 - (0{,}7 \times \textit{alder}).$$

En avisartikel skrev: ”Et resultat af at benytte den nye formel i stedet for den gamle er, at det maksimale antal hjerteslag per minut for yngre mennesker nedsættes en smule, mens det for ældre mennesker forhøjes en smule.”

Avisens påstand er korrekt. Fra hvilken alder og frem forhøjes den maksimale hjertefrekvens ved overgang til den nye formel? Begrund dit svar.

*Forord*: Der er tale om to forskellige (præskriptive) matematiske modeller, en ”gammel” og en ”ny”, hvor man skal fastlægge en bestemt konsekvens af overgang fra den gamle model til den nye. Det betyder, at *hverken præmatematisering*, egen *matematisering* eller *validering* er på færde her. (Skulle man have taget stilling til avisens påstand, havde der været mange flere ting på færde.)

*Matematisk problemløsning*: De to modeller er begge er matematiseret som lineære funktioner (med hjertefrekvensen som funktion af alder), begge med negativ hældningskoefficient. Eftersom hældningskoeffecienterne er forskellige, har de to grafer netop ét skæringspunkt, som bestemmes af ligningen 220 – ”alder” = 208 - 0,7 · ”alder”. Ved omordning fås, at 0,3 · ”alder” = 12, dvs. den søgte ”skæringsalder” er lig 40. Det konstateres, at for ”alder” > 40 er funktionsværdierne for den nye funktion større end for den gamle.

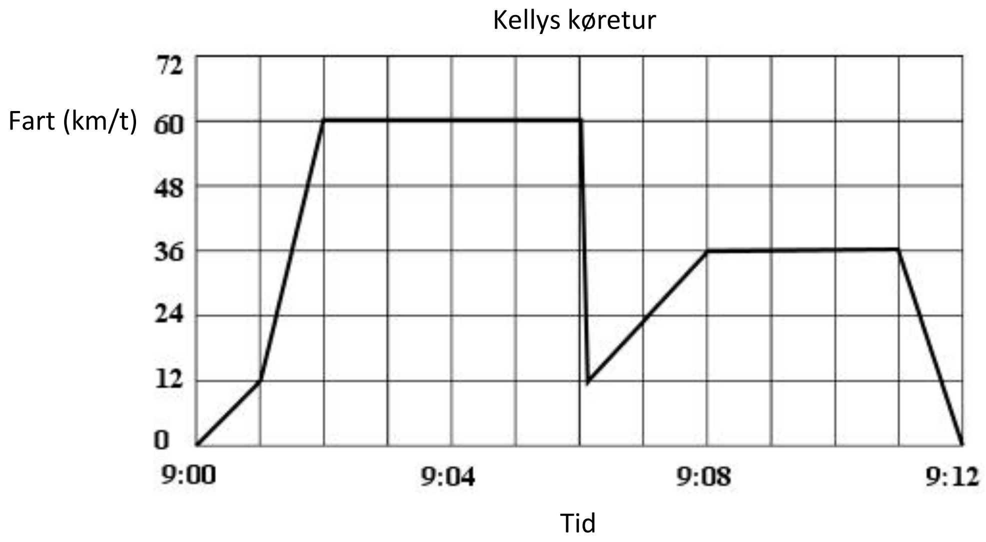
*Afmatematiseringen* består dels banalt i at tilføje enheden ”år” til alder, dels i at oversætte det forhold at funktionsværdien efter 40 er større ved den nye forskrift end ved den gamle, til konklusionen at den anslåede maksimale hjertefrekvens øges for personer over 40 år. (Afmatematiseringen fortæller så tillige, ved at sammenholde med avisomtalen af ”overgangalderen”, at folk over 40 år er at opfatte som ældre. Tag den, matematikvejleder!)

Denne ***opgaves kerne*** ligger i den ***matematiske problemløsning*** i ***kombination med afmatematiseringen***.

**Spørgsmål 13**

Kelly kørte en tur i sin bil. Pludselig løb en kat ud foran bilen. Kelly bremsede hårdt op og undgik at ramme katten. Lettere rystet besluttede Kelly sig for at køre hjem igen. Diagrammet nedenfor viser en forenklet gengivelse af bilens fart i løbet af turen.

Hvad var klokken, da Kelly bremsede hårdt op for at undgå at ramme katten? Begrund dit svar.




*Præmatematisering*: Består i at signalordene ”kørte en tur”, ”pludselig”, ”bremsede hårdt op”, ”undgik at ramme”, ”køre hjem igen”, og ”hvad var klokken?” alle giver input til modellen og dens fortolkning.

*Matematiseringen er foretaget* i form af en fart/tid-graf der repræsenterer en stykkevis lineær funktion af bilens fart som funktion af tiden i et vist interval.

*Matematisk problemløsning* i egentlig forstand er ikke på tapetet her.

***Afmatematiseringen*** af modellen er ***opgavens kerne***. Den består i at afkode de respektive knækpunkter og graflinjestykker i forhold til opgavehistorien. Med hensyn til det stillede spørgsmål skal vi lokalisere det tidspunkt, hvor Kelly bremser hårdt op. Det ligger hvor farten begynder at falder hastigt, dvs. grafen har et stejlt stykke med negativ hældningskoefficient. Dette tidspunkt ligger, ved aflæsning af inddelingen, kl. 9:06, hvilket er svaret på spørgsmålet.

*Validering* af modelresultatet er ikke en del af problemstillingen. Man kan dog aflæse, at Kelly undgik katten af det forhold, at hendes opbremsning ikke bragte farten ned til 0, hvad en påkørsel næsten sikkert ville have gjort. Ved at udvide perspektivet kan man dog let problematisere fx det forhold, at funktionen ikke er differentiabel i delingspunkterne mellem de lineære stykker. Skulle det passe, måtte Kellys bil være af en særlig beskaffenhed. Modellen må altså betragtes som en pragmatisk tilnærmelse til en mere realistisk model. Men det indgår som sagt ikke i problemstillingen.