

Kommentarer til ræsonnementsindholdet i de 23 opgaver i detektionstest 2

Mogens Niss, revideret 2025

Almene kommentarer:

Den tankegang der ligger bag dette semesters tema er, at matematiske ræsonnementer angår *retfærdiggørelsen af matematiske påstande af enhver art*, ikke kun påstande der bliver ophøjet til "sætninger" i en lærebog. For alle opgaverne er ræsonnementsindholdet lokaliseret mindst tre steder, der alle rummer krav og dermed potentielle vanskeligheder:

- (1) *i forståelsen af opgaveformuleringens logik*; enhver opgaveformulering har en logisk struktur, som skal afkodes, uanset hvad opgaven konkret handler om
- (2) *i behandlingen af den matematiske substans i opgaven*; det drejer sig om ræsonnementer der ikke er rent analytisk-logiske, men knytter sig til rammerne og reglerne for omgang med den matematiske substans, der er på færde i opgaven
- (3) *i den logiske struktur i de ræsonnementer der skal benyttes i opgavebehandlingen*; uanset hvordan opgaven konkret løses, er der en logisk struktur for gangen i løsningen.

Det skal understreges at de tre slags ræsonnementsindhold i nogle tilfælde kan være så sammenvævede, at det kan være svært at skille dem ad.

Nedenfor tilbydes en råskitse til en analyse af hvilken rolle, de tre typer ræsonnementsindhold spiller i de 23 opgaver. Det er selvfølgelig ikke tanken, at eleverne skulle kunne udtrykke sig sådan som det sker i analysen. Analysen er henvendt til lærere.

Spørgsmål 1: (1) Man skal opfatte de grundlæggende påstande $K \subseteq R$ og $R \subseteq F$ (hvor K , R og F står for hhv. klassen af kvadrater, klassen af rektangler og klassen af firkanter), og at der spørges om hvorvidt det er korrekt, at $F \subseteq K$. Der er altså her tale om *klasselogik, baseret på implikationer*. Man skal desuden forstå, at spørgsmålets karakter ikke tillader svaret "somme tider". (2) Formelt er den matematiske substans geometri, men man behøver ikke at kende meget til geometri for at forstå eller løse opgaven. (3) Opgaven løses også ved anvendelse af klasselogik: Det forhold, $K \subseteq R$ og $R \subseteq F$, medfører, at $K \subseteq F$. Det betyder imidlertid ikke, at inklusionen – eller ækvivalent hermed den indgående implikation – kan vendes om til $F \subseteq K$, eftersom der findes firkanter som ikke er kvadrater.

Spørgsmål 2: (1) Man skal forstå, at den påstand der skal begrundes, er *negationen* af en *eksistenspåstand*, dvs. man skal begrunde, at intet objekt (her x) tilfredsstiller det anførte krav (her ligningen). (2) Ræsonnementets matematiske substans er elementær algebra, og man skal kunne foretage additionsbaserede algebraiske manipulationer for at kunne løse opgaven. (3) Opgaven løses ved et *indirekte ræsonnement* ("modstridsbevis"): Antog vi eksistensen af en løsning x , ville den lovlige subtraktion af $38x$ på begge sider af ligningen (jf. (2)) føre til, at $72 = 0$, i strid med hvad vi ved om 0 og 72. Da antagelsen om eksistens af en løsning har en ukorrekt logisk-algebraisk konsekvens, må den falde.

Spørgsmål 3: (1) Man skal forstå, at den påstand der skal begrundes, er en *universalpåstand*, (jf. ordet "ethvert"), dvs. man skal begrunde, at ethvert objekt (her x) tilfredsstiller det anførte krav (her ligningen). (2) Ræsonnementets matematiske substans er algebra, og man skal kunne foretage additions- og multiplikationsbaserede algebraiske manipulationer for at kunne løse opgave. (3)

Opgaven løses ved at indse (på basis af (2)), at ligningskravet er ækvivalent med en identitet ($2x = 2x$) der derfor er opfyldt for alle x . Ligningskravet er tillige ækvivalent med $0 = 0$, en sand påstand, der ikke afhænger af x .

Spørgsmål 4: (1) Man skal forstå, at Søren fremsætter en *universalpåstand* i to variable a og b (jf. ordet "altid"). Man skal forstå, at der tilbydes fire forskellige påstande som reaktion på denne påstand, hvoraf de tre sidste udtrykker indvendinger/forbehold over for Sørens påstand, mens den første støtter Søren. Man skal forstå, at hver af disse fire reaktioner skal evalueres i forhold til Sørens påstand. Og man skal endelig forstå, at det er muligt at nogle er korrekte og andre ukorrekte. Der er altså tale om en ganske kompleks logisk struktur i selve formuleringen af opgaven. **(2)**

Ræsonnementets matematiske substans er aritmetik og angår ordningsrelationens samspil med multiplikation inden for talområder der rummer brøker samt positive og negative heltal. Sørens påstand henviser ikke til noget bestemt talområde, mens to (måske tre) af de fire reaktioner gør. **(3)** Den logiske struktur i løsningsræsonnementet er dels, at reaktion b) og d) er korrekte *modeksempler* inden for hhv. de rationale og de hele tal, der torpederer Sørens universalpåstand, hvilket også torpederer reaktion a), mens reaktion c) ikke er logisk klar, fordi "for det meste" og "få undtagelser" ikke er veldefinerede ideer i en matematisk sammenhæng.

Spørgsmål 5: (1) Man skal opfatte, at man bliver bedt om at *evaluere en universalpåstand* (i spørgsmål a)), men også om et evaluere en *argumentation* for den, ved at tage stilling til dens korrekthed (i b)) og, i fald argumentationen forkastes, udpege en eller flere fejl i den (c)). Man skal derfor også forstå den logiske struktur af denne argumentation - nemlig at vi ser på et vilkårligt objekt (her et tal), udsætter dette for diverse manipulationer og heraf slutter at det vilkårlige objekt er et bestemt objekt (her tallet 0). Endelig skal man kunne se forskel på at evaluere en påstand og at evaluere en argumentation for den. Det er oplagt, at selve opgaveformuleringen har en meget kompleks og involveret logisk struktur. **(2)** Ræsonnementets matematiske substans er algebra og algebraiske manipulationer, herunder multiplikation, faktorisering, forlængning, forkortning og division i et alment (men uspecificeret) talområde, samt – især - umuligheden af division med 0. Substansen angår også det faktum, at det er ukorrekt, at ethvert tal er lig 0. **(3)** Den logiske struktur i løsningsræsonnementet er dels en påmindelse om, at ikke ethvert tal faktisk er 0 (i a)), dels en påpegning af at slutningerne i det anførte ræsonnement hviler på et ulovligt grundlag (vi "snyder" når vi sætter b lig a og derefter "glemmer" at $b - a = 0$ og at den efterfølgende division med $b - a = 0$ derfor er ulovlig).

Spørgsmål 6: (1) Man skal forstå, at man anmodes om at *evaluere et argument* for, at en negativ *universalpåstand* ("det passer aldrig") følger af et kendt *universalresultat* ("det gælder altid"), som er en identitet. **(2)** Ræsonnementets matematiske substans er elementær algebra. **(3)** Den logiske struktur i opgaveløsningen er, at det forhold, at de to højresider har forskellig *form*, ikke forhindrer, at de i nogle tilfælde (nemlig præcis hvis x eller y er 0) kan have samme *værdi*.

Spørgsmål 7: (1) Man skal opfatte, at der skal *vælges* mellem en eller flere forslag til *forklaring* på et kendt forbud omhandlende en *variabel* dividend. Man skal videre forstå, at a) ikke rummer et matematisk argument, at b) *negerer en eksistenspåstand* uden begrænsende undtagelser (t vilkårlig), samt at c) på én gang *negerer en eksistenspåstand* i en generel situation ($t \neq 0$) med en undtagelse samt fremsætter en *universalpåstand* i undtagelsessituationen ($t = 0$). [Fra et formallogisk synspunkt er c) en lidt tricky konjunktion: $(\forall q: 0 \cdot q = 0) \wedge ((t \neq 0) \Rightarrow (\exists q: q \cdot 0 = t))$]. Samlet set giver dette en mere kompleks logisk struktur, end det måske umiddelbart ser ud til. **(2)** Ræsonnements matematiske

substans er aritmetik og elementær algebra i et uspecificeret talområde. **(3)** Den logiske struktur i opgaveløsningen er gennemgang af hver af de tre forklaringer, hvor a) er rent autoritær, mens b) er korrekt i almindelighed men *ikke* i undtagelsessituationen $t = 0$, hvorved forklaring b), som den står, er ukorrekt, mens i c) både den negerede eksistenspåstand i situationen med undtagelse og universalpåstanden når $t = 0$ er korrekt, hvorved c) samlet set er korrekt som den eneste af de tre.

Spørgsmål 8: **(1)** Man skal opfatte, at man anmodes om at *vurdere et argument* vedrørende *gennemsnit af gennemsnit* for to populationer. **(2)** Den matematiske substans i ræsonnementet angår aritmetisk modellering, nemlig dels rater (BNP/indbygger), dels gennemsnit af rater over tre forskellige populationer (USA, Danmark, $USA \cup \text{Danmark}$) samt gennemsnit af gennemsnit. **(3)** Den logiske struktur af opgaveløsningen er at gennemsnittet over en population sammensat af to populationer af meget forskellig størrelse ikke er gennemsnittet af de to delpopulationers gennemsnit.

Spørgsmål 9: **(1)** Man skal opfatte, at man skal tage stilling til *omvendingen af en implikation* "Hvis en graf er givet ved forskriften $y = ax$, så er grafen en ret linje gennem $(0,0)$ ". **(2)** Ræsonnementets matematiske substans vedrører analytisk geometri m.s.h.p (visse) rette linjers koordinatfremstilling. **(3)** Løsningsræsonnementets logiske struktur er dels, at man *ikke* i almindelighed kan *vende en implikation*, dels at der i den konkrete sag findes et *modeksempel* på den omvendte implikation ($x = 0$ fremstiller en ret linje gennem $(0,0)$, uden at være af formen $y = ax$), som derfor ikke gælder.

Spørgsmål 10: **(1)** Man skal opfatte, at man skal *tage stilling* til om andelen af en fællespopulation (P/K der tillige er cafe-gæster) af én overpopulation (samtlige cafe-gæster) er identisk med andelen af fællespopulationen ud af en anden overpopulation (samtlige P/K 'er). **(2)** Den matematiske substans i ræsonnementet er aritmetisk modellering, nemlig andele af en population ud af forskellige overpopulationer, samt brøker. **(3)** Opgaveløsningens logiske struktur er, at man ikke fra størrelsen af *én brøk* med given tæller kan slutte noget om størrelsen af *en anden brøk* med den samme tæller.

Spørgsmål 11: **(1)** Man skal opfatte, at man skal *tage stilling* til den påstand (regel), at procentdelen af en sammenbragt delpopulation ud af en sammenbragt overpopulation er lig summen af de to procentdele for de respektive delpopulationer. **(2)** Den matematiske substans i ræsonnementet angår aritmetisk modellering, specielt procentdele, og regning med brøker (specielt addition). **(3)** Den logiske struktur af løsningsræsonnementet er den logiske struktur i den indsigt, at man ikke adderer to brøker ved at addere henholdsvis tællerne og nævnerne, $(m_b + k_b)/(m+k) \neq m_b/m + k_b/k$.

Spørgsmål 12: **(1)** Man skal forstå, at der spørges om, hvorvidt et *bestemt objekt er medlem af generel klasse af objekter* defineret ved hjælp af to kriterier ($y = ax + b$ og $a \neq 0$). Der er altså tale om klasselogik. **(2)** Den matematiske substans i ræsonnementet vedrører en speciel klasse af funktioner (1. gradspolynomier) givet ved algebraiske forskrifter. **(3)** Logikken i løsningsræsonnementet er, at ét af de to definerende kriterier for medlemskab af klassen (af 1. gradspolynomier) ikke er opfyldt for det forelagte objekt.

Spørgsmål 13: **(1)** Man skal opfatte, at en given slags objekter (kvadrater) er defineret som en anden slags objekter (rektangler) med en yderligere særlig egenskab (fire lige lange sider), og at man skal *afgøre om alle objekter af den første slags objekter også er af den anden slags*. Der er altså tale om klasselogik. **(2)** Den matematiske substans er terminologien for plan figurgeometri (her blot vedrørende polygoner, nærmere bestemt rektangler og kvadrater). **(3)** Logikken i opgaveløsningen er, at kvadraterne er defineret som en bestemt delklasse af rektanglerne (som der forudsættes

grundkendskab til), så det spiller ingen rolle hvilke yderligere egenskaber der karakteriserer kvadraterne blandt rektanglerne for at kunne konkludere at ethvert kvadrat er et rektangel.

Spørgsmål 14: i fortsættelse af spørgsmål 13: **(1)** Man skal forstå, at der spørges om *hvorvidt en given implikation* ("F er et kvadrat $\Rightarrow$ F er et rektangel") *kan vendes om*. Der er altså tale om udsagnslogik. **(2)** Den matematiske substans i ræsonnementet er plan figurgeometri. **(3)** Logikken i løsningsræsonnementet er, at man ikke i almindelighed kan vende en implikation, og at omvendingen er umulig her, eftersom der findes rektangler der ikke er kvadrater, som leverer modeksempler på den omvendte implikation.

Spørgsmål 15: **(1)** Man skal opfatte, at man skal *tage stilling til en "både-og påstand"*, nemlig om halvering af en cirkels diameter *både* fører til halvering af omkreds og af areal af cirklen. Man skal altså forstå, at Søren's påstand er en konjunktion. **(2)** Den matematiske substans i ræsonnementet er plan målingsgeometri, her for cirkler, samt proportionalitet, henholdsvis kvadrering, ved skalering af diameteren. **(3)** Logikken i løsningsræsonnementet er at en "både-og påstand" (en konjunktion) er sand, netop hvis begge de indgående påstande er sande, og da skalering af diameteren (her med faktoren $\frac{1}{2}$) skalerer arealet med kvadratet på skalafaktoren (altså $\frac{1}{4}$) er den ene delpåstand og dermed den samlede påstand falsk.

Spørgsmål 16: **(1)** Man skal forstå, at man skal *tage stilling til en implikation* "fordobling af alle siderne i en terning $\Rightarrow$ 8-dobling af terningens volumen". **(2)** Den matematiske substans i ræsonnementet vedrører rumlig målingsgeometri, her for terninger, samt multiplikativitet ved skalering af hver af tre faktorer i et produkt. **(3)** Løsningsræsonnementets logik består blot i at bekræfte implikationen, eftersom produktskalafaktoren er 8, når hver af de tre faktorer skales med 2.

Spørgsmål 17: **(1)** Man skal forstå, at man skal *tage stilling til en implikation* "taxakørsel sker til en grundtakst på 30 kr. og en takst på 7,30 kr./km $\Rightarrow$ man betaler dobbelt så meget ved at køre 20 km som ved at køre 10 km". **(2)** Den matematiske substans i ræsonnementet angår aritmetisk modellering samt ikke-proportionale, lineære funktioner (altså affine funktioner). **(3)** Logikken i løsningsræsonnementet er at forkaste konklusionen i implikationen, selv om forudsætningen holdes for sand. Konklusionen forkastes **fx** ved at observere, at $a(2x) + b \neq 2(ax + b)$, eftersom $b \neq 2b$.

Spørgsmål 18: **(1)** Man skal forstå, at man anmodes om at *forkaste en universalpåstand* ($a^2 \geq a$) om et uspecificeret talområde (dog indeholdende brøker og negative tal) ved hjælp af et, muligvis flere, modeksempler. **(2)** Den matematiske substans i løsningsræsonnementet er samspillet mellem ordning (uligheder) og kvadrering. **(3)** Logikken i løsningsræsonnementet er inspektion af hver af de fem kandidater, hvor det skal afgøres om uligheden gælder for kandidaten. De to tal for hvilke *uligheden ikke gælder*, (altså $a = 1/10$, $a = 0,2$) er de efterspurgte modeksempler.

Spørgsmål 19: **(1)** Man skal forstå, at man anmodes om at *forkaste en implikation* ("F er firesidet og F's sider er lige lange $\Rightarrow$ F er et kvadrat") ved hjælp af et, muligvis flere, modeksempler. **(2)** Den matematiske substans i løsningsræsonnementet er plan figurgeometri. **(3)** Den logiske struktur i løsningsræsonnementet er, at en implikation forkastes netop hvis forudsætningen er opfyldt uden at konklusionen er det. For kvadratet er både forudsætningen og konklusionen opfyldt, for trapezet er hverken forudsætningen (her kravet om lige lange sider) eller konklusionen opfyldt, for femkanten er

hverken forudsætningen (her kravet om firesidethed) eller konklusionen opfyldt, for rhomben er forudsætningen opfyldt, men ikke konklusionen. Rhomben er altså det søgte (eneste) modeksempel.

Spørgsmål 20: (1) Man skal opfatte, at Aya og Ali fremsætter to *implikationer* ("summen af to heltal er lige $\Rightarrow$ produktet af dem er ulige" og "produktet af to heltal er ulige $\Rightarrow$ summen af dem er lige") på baggrund af et konkret eksempel, hvor summen er lige og produktet er ulige, Man skal endvidere opfattes, at man anmodes om at *tage stilling til om de to implikationer er ens eller forskellige*, med andre ord om implikationen kan vendes om i den pågældende situation. (2) Den matematiske substans, her heltalsaritmetik, spiller kun en mindre rolle for spørgsmålet, på nær måske som distraktor. (3) Den logiske struktur i løsningsræsonnementet er dels, at de to implikationer er hinandens omvendte og dermed i udgangspunktet forskellige. Konkret er de udsagn, implikationerne forbinder, ikke ækvivalente, eftersom den første implikation er falsk (summen af 2 og 4 er lige, men deres produkt er ikke lige), mens den anden er sand (hvis et produkt af to heltal er ulige, er begge tallene ulige (ellers var produktet lige), hvorved deres sum er lige). De to implikationer er altså ikke blot formelt forskellige, de er også materielt forskellige.

Spørgsmål 21: (1) Man skal forstå, at man skal *tage stilling til* om et foreslået (figurstøttet) *bevis for en universalpåstand* (vinkelsummen i en trekant er altid 180°) faktisk er et bevis for påstanden i alle tænkelige tilfælde. Man skal endvidere forstå, at det foreslåede bevis *hviler på* en anden universalpåstand, nemlig at ensliggende vinkler ved skæring af to parallelle linjer er lige store (hvilket markeres ved at vinklerne gives samme benævnelse). (2) Den matematiske substans i ræsonnementet er euklidisk plangeometri, støttet af figurer. (3) Den logiske struktur i løsningsræsonnementet er, at hvis det *forudsættes* at ensliggende vinkler ved parallelle linjer er lige store – en forudsætning der (måske) kan accepteres på et visuelt grundlag – genfindes vinkelsummen i trekanten tillige som summen af vinklerne ved linjen parallel med grundlinjen, en sum der til sammen giver 180° , igen ved visuel inspektion. En accept af, at beviset er universelt for alle trekanter, hviler altså dels på en accept af de anførte visuelle antagelser/inspektioner, dels på en overbevisning om, at den parallelle linje gennem et toppunkt kan trækkes for en hvilken som helst trekant og med de samme konsekvenser. Målingsbaseret empirisk inspektion vil ikke kunne give denne konklusion. Det bør bemærkes, at beviset ikke ville holde vand, hvis rammen havde været aksiomatisk euklidisk plangeometri uden figurstøtte.

Spørgsmål 22: (1) Man anmodes om at *begrunde* en enkeltstående påstand, ikke om at tage stilling til den, om end det måske kan være svært at begrunde en påstand, man ikke tror på (dette er jo ikke jura☺). Man skal altså først *acceptere påstanden* og derefter begrunde den. (2) Den matematiske substans i løsningsræsonnementet er *modellering* med kombinatoriske *sandsynligheder*. (3) Den logiske struktur i løsningsræsonnementet er at udpege tallet 7 som den sum af to tal 1,2,...,6, der kan opnås på flest forskellige måder, hvis man gør den modelleringsforudsætning, at alle 36 udfald af øjenpar for to forskellige terninger er lige sandsynlige. Man skal altså – fx - *forkaste* en modelleringsantagelse om at de 11 mulige summer af øjenparrene er lige sandsynlige.

Spørgsmål 23: (1) Man skal forstå, at man anmodes om at *tage stilling til*, om et foreslået (*indirekte*) *bevis for negationen af en eksistenspåstand* - der findes ikke et mindste tal af formen $1/n$ (hvor n er et naturligt tal) - faktisk beviser påstanden. (2) Den matematiske substans i løsningsræsonnementet er dels samspillet mellem aritmetik og ordning for stambrøker dels uendeligheden af mængden af naturlige tal. (3) Den logiske struktur i løsningsræsonnementet er at tage udgangspunktet i

negationen af den negerede eksistenspåstand, altså antagelsen om, at der *fandtes* et mindste tal af formen $1/n$. Herefter indses, at der så måtte findes et endnu mindre sådant tal (ved at øge nævneren med 1), hvilket er i modstrid med antagelsen om, at der fandtes et mindste. Da denne antagelse giver anledning til en absurditet, må den falde. Ergo må dens negation - den fremsatte påstand – accepteres.