

Kommentarer til spørgsmålene i detektionstest 1," 57 spørgsmål fra Professoren"

Ved **Mogens Niss**, september 2014/januar 2025

De følgende analytiske kommentarer til spørgsmålene foregiver ikke, at eleverne har tænkt som anført. De peger i stedet på underliggende begrebsmæssige og kognitive faktorer, som *kunne* være på spil bag besvarelsen. Det er imidlertid – som altid – også muligt at elevernes besvarelse ikke hviler på nogen indre rationalitet men på gæt på, hvad opgavestillerne mon forestiller sig og efterspørger. Der er desuden grund til at være opmærksom på de fortolkningsspørgsmål som altid byder sig til med multiple-choice opgaver.

1: Opgaven tester først og fremmest elevernes *talbegreb*, og deres tilegnelse af *notationskonventioner*, i anden række deres *omskrivningsformåen*, dvs. omskrivning til ækvivalente repræsentationer. Omskrives $1\frac{1}{2}$ til $\frac{3}{2}$ antyder besvarelsen to forhold. Dels, at eleven har tilegnet sig notationskonventionen for blandede tal, altså at $m_{p/q}$ betyder $m + p/q$ og ikke, som man nu og da ser, $m \cdot p/q$, i forveksling med konventionen $ab = a \cdot b$, en forveksling som er let at forstå. En sådan forveksling vil føre til svaret $1\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Dels, at eleven har annammet blandede tal som brøktal, og måske ligefrem, at matematikken traditionelt favoriserer brøktal frem for blandede tal. Omskrives $1\frac{1}{2}$ til 1,5, antydes en mulig favorisering hos eleven af *decimalbrøksfremstillinger* og tals størrelsesmæssige værdi. Men eftersom 1,5 er eksakt lig $1\frac{1}{2}$, kan vi ikke alene på svaret afgøre hvad der ligger bag. Det kræver nærmere undersøgelser.

2: Opgaven ligger på to måder i forlængelse af den foregående. Som i opgave 1 peger omskrivning af $\frac{32}{3}$ til $\frac{11}{3}$ på tilegnelse dels af *notationskonventionen*, dels af prioritering af fremstillinger på brøkform samt evnen til at udtrykke $3 + \frac{2}{3}$ i tredjedele. Omskrives $\frac{32}{3}$ til 2, er der åbenbart tale om en fejlfortolkning af notationskonventionen, jf. Spm 1, men samtidig om en vis (om end fejlanbragt) brøkrekningsformåen. Omskrives $\frac{32}{3}$ til, fx, 3,67, antydes en favorisering af *decimalbrøksfremstillinger* og fokus på tals størrelsesmæssige værdi. Det sidste vil endnu mere kunne være tillældet, hvis eleven omskriver til 3,7. Som noget nyt opstår spørgsmålet om, hvorvidt eleven tror at sådanne svar er eksakte eller tilnærmede. Til sammen kan svarene på Spm. 1 og 2 pege på retningen for nærmere undersøgelser af elevens talbegreb og forestillinger om *talrepræsentationer*, herunder notationskonventioner.

3: Opgaven tester først og fremmest elevernes tilegnelse af en *notationskonvention*, som ikke alle har annammet. Ordet "betyder" er et nøgleord, der peger på *meningen* med de to udtryk, ikke de mulige værdier, hvor spørgsmålet snarere skulle have lydt "Er a^2 det samme som $2a$?". Det sidste er på dagsordenen i Spm. 17. Opgaven viser altså indirekte hen til forskellen mellem udtryks betydning og deres mulige værdier. Dermed testes også *begrebsforståelse*.

4: Denne opgave tester alene rækkevidden af tilegnelsen af *notationskonventioner* (baseret på $xy = x \cdot y$), hvor a^3 jo er ukonventionel skrivemåde. Svaret ændres hos mange elever, hvis der i stedet spørges om $ab = ba$. Indblandingen af konkrete tal sammen med bogstavtal kan

give anledning til usikkerhed i besvarelsen. I øvrigt kan svaret "nej" evt. hvile på en CAS-baseret notationsopfattelse, hvor a_3 fortolkes som $a_3 = a_3$. Om det er tilfældet, kræver nærmere undersøgelse.

5: Opgaven er i familie med Spm. 3, fordi den dels tester forskellen mellem meningen med to udtryk (altså en ren *notationskonvention*, atter gemt i ordet "betyder") og de to udtryks værdier, jf. Spm. 18, altså *begrebsforståelse*. Her lurar også fælden fra notationskonventionen for blandede tal, idet vi, hvis b er brøken $4/3$, faktisk *har* $44/3 = 4 + 4/3$. Gives et svar i stil med "ja, hvis $b = 4/3$ " peges på, at eleven har opfattet opgaven som en ligning i b . Ikke underligt at ubefæstede sjæle kan tage fejl her.

6: Opgaven tester en kombination af *konventionstilegnelse*, *brøksbegrebsforståelse* og elementær *manipulationsformåen*. Svares umiddelbart, uden udregninger eller kommentarer, "1", er det tænkeligt, at eleven har indset, at b/a altid er det reciprokke af a/b . Gives svaret "1" efter dobbelt forkortelse med a , hhv. b , i tælleren i den ene og nævneren i den anden brøk, er det tænkeligt eleven har erhvervet nogen indsigt i brøkbegrebet og i almen brøkregning. Det samme kan siges, hvis der svares, fx, $a/b \cdot b/a = (a \cdot b)/(b \cdot a) = ((a \cdot b)/(a \cdot b) =) 1$. Jf. i øvrigt Spm 10. Kommenterer eleven (korrekt) betydningen af at hverken a eller b er 0, peges på et højt niveau af algebraisk forståelse. Svares $a/b \cdot b/a = 0$, udviser eleven med stor sandsynlighed en del af syndromet "0 er ikke et tal, men en markør af fravær", jf. flere andre Spm.

7: Opgaven tester en kombination af *begrebs- og konventionsforståelse*, idet kernen i sagen er forskellen mellem på den ene side et tals indre egenskab som negativt eller positivt og på den anden side tilstedeværelsen – eller fraværet – af et minustegn i en symbolsk opskrivning. Denne forskel findes jo ikke, hvis tallet er et konkret, simpelt negativt tal, fx -3 , men opstår hvis tallet bag minustegnet er komplekst (fx $-(-(-3))$) eller repræsenteret af et bogstav. Gives svaret "negativt", er det tænkeligt (men jo ikke givet), at elevens begreb om negative tal alene er knyttet til det (sidst benyttede) foranstillede minustegn, hvorved der ikke er harmoni mellem begrebet negativt tal og konventionen for brug af minustegnet. Gives svaret "kan ikke afgøres" er det sandsynligt, at eleven har tilegnet sig denne forståelse. Det er også muligt at der svares taktisk, siden svarmuligheden "kan ikke afgøres" overhovedet er anført. Svares "positivt", er der grund til at spørge videre.

8: Opgavens fokus er *begrebsforståelse* – af muligheden for mere end 100% af en størrelse (her et rent tal) og af additivitet af procentdele – i kombination med omsætningen af denne forståelse til en *elementær udregning*, hvor regneproblemer ikke stiller sig i vejen for forståelsen. Formuleringen "...% af..." understreger, at procenter er operatorer på størrelser og ikke selv tal.

9: Opgaven tester *begrebs- og strukturforståelse* i kombination med *elementær (brøk)regning*. Gives svaret "25%" antydes at eleven er offer for den hyppigt forekommende misforståelse, at et procenttillæg udgør den procentdel af slutresultatet, som procenttallet angiver. Det er altså

ikke annammet, at $b = a + 0,25a = (5/4) \cdot a$ indebærer, at $0,25a = (1/4) \cdot a = (1/5) \cdot b = 0,20b$. Svarer eleven "20%", er det sandsynligt, at eleven har annammet denne sammenhæng.

10: Opgaven er et specialtilfælde, af Spm. 6, men med konkrete værdier for a og b . Den tester om der er *afvigelse* i svaret i forhold til Spm 6, hvilket kan bidrage til nuancering af konklusionerne vedr. dette spørgsmål. Giver en elev både her og i Spm. 6 svaret "0", kan "0 er ikke et tal"-syndromet meget let være rodfæstet hos eleven. Det er dog også muligt at tilstedeværelsen af $\sqrt{2}$ bidrager til at "afkonkretisere" de to brøker. Svarer eleven "0" i Spm 6, men "1" her, antydes at "0"-syndromet især optræder ved almene symbolholdige udtryk, men ikke med konkrete taludtryk, hvorved pilen peger på vanskeligheder med symbol- og formalismekompetencen. Svarer eleven "1" i begge opgaver, er det tænkeligt at eleven har tilegnet sig vigtige træk ved denne problemstilling.

11: Opgaven tester *begrebsforståelse* og sammenlignende *overslagsregning* vedrørende forskellige talrepræsentationer (brøker og decimaltal), men også *ordningen* i de reelle tal. Det korrekte svar uden nærmere uddybning bør ikke overfortolkes, eftersom det kan hvile på et gæt. Det inviterer til nærmere samtale med eleven. Det samme gælder et ukorrekt svar med eller uden uddybning, fx et fejlreasonnement à la $5/9 < 5/10 = 0,5 < 0,6$. Det korrekte svar ledsaget af en holdbar uddybning - fx at $5/9 = (5 \cdot 10)/(9 \cdot 10) = 50/90$, mens $0,6 = 6/10 = (6 \cdot 9)/(10 \cdot 9) = 54/90$, og $50 < 54$, eller $5/9 = 0,55... < 0,6$ - kunne antyde, at eleven er på omgangshøjde med denne problemstilling.

12: Opgaven tester *konventions-* og *begrebsforståelse* i tilknytning til brøkbegrebet og dermed forbundne dele af symbol- og formalismekompetencen, med særligt fokus på en brøk, hvis tæller selv er en brøk. Svares "1/d", peges på, at eleven både er klar over, hvad udtrykket i opgaven betyder, og hvordan det reduceres. Svares "c/c·d" (eller "c/d·c"), kan det antages, at eleven har tilegnet sig betydningen af udtrykket og de formelle sider af division af en brøk med et tal og forbindelsen heraf til en brøk af brøker. Når udtrykket ikke er reduceret, kan det enten være fordi eleven tror, at det kun er de formelle sider der efterspørges, eller fordi eleven ikke kan udføre reduktionen (forkortningen). Om der er tale om det ene eller det andet, kræver nærmere undersøgelse. Svares " c^2/d ", er det muligt at eleven (på fejlagtig måde) har aktiveret reglen vedrørende division med en brøk (idet c i nævneren fortolkes som brøken $1/c$), eller har vanskeligheder med andre dele af symbol- og formalismekompetencen. Igen kalder afgørelsen af sådanne spørgsmål på nærmere undersøgelser. Undersøgelser i tilknytning til denne opgave kan med fordel gennemføres med støtte fra opgaver med konkrete talversioner af c og d – herunder sådanne hvor c og d selv er brøker!

13: Opgaven tester *begrebsforståelse* vedrørende *brøkbegrebet*, *ordningsrelationen* for brøker og samspillet mellem *brøk* og *division*. Svares enten korrekt eller forkert, men uden uddybning, kræver det en nærmere undersøgelse at bestemme rækkevidden af og grundlaget for svaret. Svares forkert med uddybning, fx at "4 er større end 3", er der grund til at gå på jagt efter kilden til fejlopfattelsen, som måske kunne være, at eleven ikke er opmærksom på, at når

et tal divideres med et større tal, bliver resultatet større. I den forbindelse kunne man inddrage brøkerne $12/3$ og $12/4$.

14: Opgaven tester en kombination af *talbegrebet* (specielt vedr. 0 og dets basale algebraiske egenskaber) og *variabelbegrebet*. Svares "0", er eleven antagelig på det rene med, at produktet af 0 og et vilkårligt tal er 0. Ethvert andet svar, fx "det afhænger af hvad x er" eller "x", inviterer til nærmere undersøgelse af elevens forståelse af tallet 0 og af variabelbegrebet. Nærmere undersøgelser kunne fx inddrage $0 \cdot 0$, $0 \cdot 1$, $0 \cdot 12$, $0 \cdot a$, og ligningen " $0 \cdot x = 0$ ", ligesom man kunne undersøge, om eleven skelner mellem $0 \cdot x$ og $x \cdot 0$.

15: Opgaven tester *symbol- og formalismekompetencen* i forbindelse med de elementære regningsarter samt *variabel- og konstantbegreberne*. Det første spørgsmål er det additive modstykke til Spm. 14, mens det andet spørgsmål zoomer ind på 0. Korrekte svar på disse giver begrænset information, mens forkerte eller utilstrækkelige svar tænder signaler om yderligere undersøgelser. De to sidste spørgsmål angår navnlig symbol- og formalismekompetencen, hvor forkerte svar atter er mere informative end rigtige svar. Af interesse er, hvorvidt det spiller nogen rolle, om det ukendte tal kaldes x, a eller b.

16: Opgaven tester formelt elementær *symbol- og formalismekompetence*. Imidlertid træffer man hyppigt på svaret "0", idet forkortelse med a^5 eller gentagen forkortelse med a for mange elever resulterer i, at "der ikke er noget tilbage", hvilket registreres som "0". Det er et udtryk for "*0 er ikke et tal*"-syndromet, som angår *begrebsforståelse*. Styrken og rækkevidden af dette hos den enkelte elev kan belyses af spørgsmål vedrørende, fx, $1^5/1^5$, $2^5/2^5$, a/a , $6/6$ og lignende. Svarene på Spm. 6 og 10 kan inddrages som konsistenscheck. For enkelte elever, der giver svaret "0", kan der være tale om en forveksling af brøkstregen og minustegnet, hvilket vedrører *notationskonventionerne*.

17: Opgaven tester *begrebs- og konventionsforståelse* af forskellen på betydningen af udtrykkene a^2 og $2a$ og de værdier de kan antage, jf Spm. 3. Også *variabel- og ligningsbegrebet* testes. Giver svaret "nej", er det tænkeligt at fokuseringen på udtrykkenes form – og måske svaret på Spm. 3 – ligger bag. Om det er tilfældet må undersøges nærmere. I den forbindelse kan man videre spørge om der findes x, så $x^2 = 2x$. Svares der korrekt på det, antydes, at eleven får øje på et ligningsspørgsmål, når der opereres med x, men ikke når der opereres med a, dvs. at konventionerne vedrørende navne for variable, ubekendte og konstanter dominerer over forståelsen af deres rolle. Svares "ja" med uddybningen "hvis $a = 2$ " eller " $a = 0$ ", er eleven klar over at udtrykkene kan antage forskellige værdier afhængigt af a's værdi, mens det ikke er sikkert at ligningsbegrebet er på banen. Det kan man tillade sig at antage, hvis der svares "ja, præcis hvis $a = 2$ eller $a = 0$ ".

18: Opgaven udgør den additive parallel til Smp. 17 og tester på lignende vist *begrebs- og konventionsforståelse* af forskellen på betydningen af udtrykkene $4b$ og $4+b$ og de værdier de kan antage, jf. kommentaren til Spm. 5. Svarmulighederne for Spm. 17 overføres *mutatis*

mutandis til Spm. 18. Hovedforskellen er, at der her kun er én løsning, mens der i Spm. 17 er to.

19: Opgaven tester *begrebs- og operationsforståelse*, herunder invertering af brøk. Gives svaret " $k = 4/5 \cdot s$ ", antydes at eleven ikke er klar over, at den oprindelige form tildeler k og s asymmetriske roller, eller at operationsforståelsen er mangelfuld. Svaret " $k = 5/4 \cdot s$ " er en indikation på, at sådanne problemer ikke har betydning for eleven i denne sammenhæng.

20: Opgaven tester primært forståelsen af selve *ligningsbegrebet*, og dermed *løsningsbegrebet*, sekundært forståelsen af *lighedstegnet*. Gives et svar i stil med "alle x er løsninger", har eleven annammet vigtige sider af lignings- og løsningsbegreberne. Andre svar – som fx "det kan man da ikke, fordi vi ikke kan finde x ", eller " $0 = 0$?" uden konklusion – peger på mere eller mindre dybtgående problemer med ligningsbegrebet, fx forestillingen om at en ligning altid har netop én løsning, eller at en ligning er en opfordring til at foretage en række skridt, som til sidst munder ud i et svar af formen " $x = \dots$ ". Atter andre svar, fx " $x = 0$ ", kunne pege på problemer med lighedstegnet i omgangen med ligninger: "det der ender med at stå på højresiden af lighedstegnet, når reduktionen er fuldført, er løsningen til ligningen". Afklaring af hvad der hos en elev ligger bag forkerte svar, kræver supplerende undersøgelser.

21: Opgaven tester en kombination af *variabelbegrebet* og *ligningsbegrebet*. Gives svaret "de er ens" uden at ligningerne løses, kan det formodes at eleven har tilegnet sig, at det afgørende i sagen er, at c og d skal tilfredsstille de samme krav, de er altså blot forskellige symboler for de(t) samme tal, og de to ligninger er identiske. Gives det korrekte svar "de er begge $87/7$ " uden yderligere kommentarer, har eleven i hvert fald løst den ene ligning, måske dem begge. Om dette hviler på en opfattelse af, hvad der spørges om ("der skal skaffes et talsvar"), på strukturforståelse, eller på løsningen af to ligninger, hvis løsninger viser sig ens, kræver nærmere undersøgelser. Det samme gælder, hvis der svares forkert, ikke mindst hvis man træffer på svaret " $c < d$ ", fordi c står før d i alfabetet.

22: Opgaven tester en kombination af forståelsen af *variabelsammenhænge* (og mere generelt *funktionsbegrebet*) og af *lighedstegnet*. Svares "y er 5 større end x", eller noget ækvivalent (fx "x er altid 5 mindre end y") peges på, at eleven har styr på sagen. Svares noget i stil med "y = 10 og x = 5", antydes, at eleven forveksler en variabelsammenhæng der er opfyldt for uendeligt mange talpar, med angivelse af et enkelt par der leverer varen. Svares "y er 5 mindre end x", kan der foreligge den mere grundlæggende misforståelse, at x 'et på højresiden bliver forøget med 5, men det gør y ikke. Det peger på at lighedstegnet fortolkes som et skilletegn og ikke som et relationsbånd. Svares fx "det kan man ikke sige noget om, for vi kender jo ikke x og y ", er det tænkeligt at der både foreligger en misforståelse af variabelbegrebet for variable, der er bundet sammen i en ligning (med uendeligt mange løsninger) og af ligningsbegrebet. Der er righoldige muligheder for at forfølge kilderne til elevens fejlsvar på denne opgave.

23: Opgaven tester forståelsen af sammenhængen mellem *funktionsforskrifters form og deres værdier* i sammenhæng med *ækvivalente omskrivninger*. Svares "forskellige", er det sandsynligt, at eleven afgør sagen ved udelukkende at se på udtrykkenes ydre form. Dette svar giver anledning til uddybende undersøgelser af kilderne til svaret. Svares "lig hinanden", har eleven antagelig indset, at de to funktionsforskrifter repræsenterer forskellige – men ækvivalente - udgaver af den samme funktion.

24: Opgaven tester *funktionsbegrebet*, nærmere bestemt samspillet mellem *begrebsdefinition* og *begrebsbillede* for elementære funktioner. Svares "ja", er det tænkeligt at eleven har annammet, at en funktion godt kan være konstant. Svares "nej", er der flere mulige forklaringer, som må afklares gennem nærmere undersøgelser. Det er fx muligt, at fraværet af et x i funktionsforskriften er ansvarlig for svaret "nej". Det er også muligt, at problemet er, at funktionsværdien ikke varierer med x , eller at en funktion hvis graf er en vandret linje, ikke ses som en funktion, fordi "sædvanlige" funktionsgrafer er voksende eller aftagende på nogle strækninger.

25: Opgaven, der er nært knyttet til Spm. 20, tester begrebet *løsning til en ligning* (til forskel fra veje til *løsning af en ligning*). Hvor Spm. 20 ønsker ligningen løst (fuldstændigt), spørger dette spørgsmål blot, om tallet 0 er en (enkelt) løsning til ligningen, dvs. tilfredsstiller ligningsbåndet ved indsættelse. Giver svaret "ja", er der basis for en uddybende undersøgelse af dybden i svaret, hvor man fx kan spørge hvorvidt andre konkrete talværdier opfylder ligningen, gerne i sammenhæng med elevens svar på Spm. 20. Svares "nej", inviteres til en mere fundamental undersøgelse af kilden til dette svar.

26: Opgaven tester først og fremmest *decimalbrøksbegrebet* i samspil med elementær talbehandling. Giver svaret 199, fx som nedrunding af den forkerte sum 199,423, er det højest tænkeligt at eleven har opfattet decimalerne i de to tal som hele tal 72 og 351, der skal adderes til et helt tal, 423, som så udgør decimalerne i summen. (Denne fejl kunne passende kaldes en "decimalbrøler"). En sådan elev har antagelig ikke forstået, at $0,72 = 0,720$. Svares "200", kan det antages, at de nævnte problemer ikke er opstået for denne elev, enten fordi de to tal er henholdsvis rundet op til 149 og ned til 51 eller summen 200,071 er rundet ned. Uanset svaret er der basis for undersøgelse af dets grundlag.

27: Opgaven tester forståelsen af begreberne *brøk(udtryk)* og *rationalt tal* (tallet fremstillet af ækvivalente brøker) i samspil med forkortning af brøker. Svares "alle på nær $4/12$ " eller noget tilsvarende, kan det antages, at eleven ikke har problemer på dette punkt. Svares, fx, "de to første og den sidste er alle 0,25 mens den tredje er 0,33...", har eleven annammet ligheder og forskelle i de rationale tal der fremstilles af de fire brøker, men tænker antagelig primært i decimalbrøker snarere end i brøker. Svares noget i stil med "ingen af dem", antydes at eleven alene opererer med brøkuudtryk, men savner et begreb om rationale tal.

28: Opgaven tester samspillet mellem *brøker og decimaltal*. Svares noget i stil med " $3/20 = 15/100 = 0,15$ ", kan eleven antages at have styr på sagens kerne, herunder forlængning af

brøker. Svares "0,15" uden yderligere kommentarer, kan grundlaget for svaret ikke uden videre afdækkes. Udføres en division af, fx, 30 eller 300 med 20 efterfulgt af korrekt kommaplacering, kan det antages, at eleven har annammet en generel metode til at fremskaffe decimalbrøksfremstillinger af brøker. Gives andre svar, må deres natur og kilder opsøges gennem separate undersøgelser.

29: Opgaven tester *proportionalitet/skalering* i en *elementær modelleringssammenhæng*. Svares "den første" er der brug for nærmere undersøgelse af kilden. Den kunne være, at eleven hæfter sig med den absolutte mængde af citronsaft i hver af de to blandinger, som grundlag for svaret. Tilsvarende forholder det sig, hvis der svares "den anden". Her kan eleven have hæftet sig ved den absolutte mængde af sukker i hver af de to blandinger. Svares "lige søde", kan det antages at eleven dels har annammet at sødhedsfornemmelsen bestemmes af forholdet mellem de to ingredienser, dels har erkendt at dette forhold er det samme i de to blandinger.

30: Opgaven tester *decimalbrøkbegrebet* i samspil med *notationskonventioner*, nærmere bestemt den tidligere (i Spm. 26) omtalte "decimalbrøler". Gives svaret "0,32", kan det antages at eleven har forstået, at ordningen af rene decimalbrøker bestemmes af værdien af den første decimal hvor brøkerne afviger fra hinanden, eller analogt at der "står 0" på tomme pladser ($320 > 315$). Svares "0,315" der det sandsynligt, at eleven har begået "decimalbrøleren", at eftersom $315 > 32$, må 0,315 være størst.

31: Opgaven tester *meningsindholdet i algebraiske relationer* (her med lighedstegn). Gives svaret i stil med "6 professorer giver én studerende" eller "der er seks gange så mange professorer som studerende", er det tænkeligt, at eleven har oversat relationen plads for plads uden at være opmærksom på, at S står for *antallet* af studerende og P for *antallet* af professorer, og at relationen derfor betyder at S er 6 gange så stort som P. Svares noget i stil med "antallet af studerende er 6 gange så stort som antallet af professorer", foreligger dette problem næppe. Under alle omstændigheder vil nærmere undersøgelser af kilden til elevens svar være af interesse, fx gennem udvidelse til andre proportionaliteter, fx i relation til andre sagsforhold (se evt. Jankvist & Niss, 2024).

32: Opgaven tester *symbol- og formalismekompetencen*, nærmere samspillet mellem forskellige symbolske udtryk og deres mulige værdier, og indirekte ligningsbegrebet og løsningen af elementære ligninger. Opgaven tester også til dels *matematisk notation og sprogbrug*. Svares "det kan de ikke være" eller "aldrig", kan det antages, at eleven udelukkende hæfter sig ved udtrykkenes (forskellige) form, uden at inddrage deres mulige værdier. Svares noget i stil med "når b og c begge er 0 (eller et andet konkret tal)", antydes, at eleven har annammet, at udtryk af forskellig form nogle gange kan have samme værdi, og samtidig mener, at et enkelt eksempel på det er tilstrækkeligt. Svares "præcis når $b = c$ ", eller noget ækvivalent, antydes at eleven har erkendt, at et udtømmende svar på spørgsmålet "hvornår" (der dækker over en præcis matematisk sprogbrug) kræver indførelsen og

løsningen af en ligning, hvis tre ubekendte endda er navngivet med symboler, der sædvanligvis står for konstanter eller parametre.

33: Opgaven tester *ligningsbegrebet* og *ligningsløsningsbegrebet*, nærmere bestemt samspillet mellem begrebsdefinition og begrebsbillede. Svares til det første spørgsmål noget i stil med "det kan man da ikke" eller "jeg ved ikke hvad jeg skal gøre", antydes, at eleven udelukkende fokuserer på en ligning som en opfordring til at udføre diverse procedurer, som så ikke giver mening her. Svares noget i stil med "mærkeligt spørgsmål, for løsningen står der jo allerede, $x = 1$ " eller blot " $x = 1$ ", antydes, at eleven har forstået, hvad der er på færde her. Svares til det andet spørgsmål "løsningerne er ' $x = 3$ ' og ' $x = 5$ '" eller noget ækvivalent, kan det antages, at eleven dels har annammet ligningsbegreb og ligningsløsning i denne situation, dels er i stand til at aktivere nulreglen. Svares fx "der er ingen løsning, for x skal både være 3 og 5 på én gang", har eleven indset at svaret kan gives vedhjælp af nulreglen, men har forvekslet "og" med "eller", eller anderledes sagt har troet, at begge faktorer skal være 0. Det er også muligt, at eleven tror, at de indgående x 'er ikke behøver at være ens, hvorved der er knas med en notationskonvention. Svares ved at eleven ganger parenteserne ud, reorganiserer til den sædvanlige form for en andengradsligning, og løser denne ved indsættelse i løsningsformlen, antydes et stærkt procedureorienteret ligningsbegreb, mens lignings- og løsningsbegreberne som sådan fortøner sig. Der er rig anledning til at følge op med uddybende spørgsmål.

34: Opgaven tester *symbol- og formalismekompetencen*, især vedrørende *notations- og regnekonventioner*. Sagens kerne er, hvordan eleven tackler det faktum, at n står inde i et udtryk efterfulgt af et minustegn. Svares " $n = 12$ ", evt. suppleret med udregninger undervejs, kan vi gå ud fra, at eleven er på det rene med, hvad der er på færde her. Andre svar kan kalde på nærmere undersøgelser, alt efter om problemerne knytter sig til placeringen af n 'et eller minustegnets rolle - fx om $-2+5$ opfattes som $-(2+5)$, som det kendes fra den didaktiske litteratur - eller begge dele.

35: Opgaven tester en kombination af *ligningsbegrebet* og *symbol- og formalismekompetencen*. Det første spørgsmål fokuserer på, om eleven kan håndtere en standardligning, hvor den ubekendte optræder på begge sider af lighedstegnet, men hvor negative tal hverken indgår undervejs eller i resultatet. Det andet spørgsmål er af samme art, bortset fra at der både undervejs og i resultatet optræder negative tal. Det tredje spørgsmål angår forståelsen af løsningsbegrebet, idet ligningen jo lige er blevet løst (forhåbentlig). Svares umiddelbart "nej" til det sidste spørgsmål, kan vi ikke vide, om dette korrekte svar stammer fra elevens kendskab til løsningsmængden fra umiddelbart før, eller om der er foretaget en indsættelse. Hvis ikke eleven har begrundet svaret, kræves en nærmere undersøgelse for at bestemme dets baggrund. Svares "ved ikke" til spørgsmålet, er der grund til at tro at eleven ikke har set relationen til det foregående spørgsmål. Svares "ja", er der brug for at gå eleven nærmere på klingen.

36: Opgaven tester forståelsen af *minustegnet* og *negative tal*, her i samspil med *ligningsløsning*. Elever der svarer "henholdsvis $x = -4$ og $x = 4$ " eller noget ækvivalent, udviser

ikke forståelsesvanskeligheder i på dette sted. Svares der forkert på det andet spørgsmål, er der grund til at opsøge kilden til fejlsvaret. Svares rigtigt til det andet spørgsmål, men forkert til det første, fx "ingen løsning. fordi venstresiden er negativ og højresiden positiv" eller " $x = 4$ ", antydes forveksling af fortegn med negativitet. Her vil det være af interesse at sammenholde med elevens svar på Spm. 7 med henblik på at lodde dybden af forvekslingen og i sidste instans forståelsen af begrebet negativt tal.

37: Opgaven tester *ligningsbegrebet* og begrebet *løsning* til en ligning samt forståelsen af lighedstegnet i en sammenhæng som vil komme bag på de fleste elever, fordi ligningen ingen løsninger har. Svares noget i stil med "der er ingen løsninger, fordi 72 ikke er 0", antydes forståelse af hvad i hvert fald denne ligning og en eventuel løsning til den går ud på. Svares " $x = 0$ ", eventuelt efter at eleven er nået til " $72 = 0$ ", bør det undersøges nærmere om eleven har tænkt, at løsningen til ligningen er det der står tilbage på højresiden af lighedstegnet, når yderligere reduktioner ikke er mulige. Svares "det kan man da ikke" eller "det er umuligt at finde x " eller lignende, er der brug for yderligere undersøgelser for at nå frem til grundlaget for elevens svar.

38: Opgaven tester et definitorisk aspekt af *decimalbrøkbegrebet* ($0,1$ er pr. definition lig $1/10$). Svaret "ja" viser, at eleven har styr på betydningen af $0,1$, men intet om i hvilken grad (jf. Spm 39). Der kan gås nærmere ind på dybden af svaret ved at spørge om $1/10 = 0,10$, om $1/100 = 0,100$ osv. Giver fx svaret "nej, $1/10 = 0,10$ ", antydes en misforståelse af decimalbrøkbegrebet, eventuelt i kraft af en misforståelse af *konventionen* for opskrivning. Dette kan også udforskes yderligere ved at spørge til $1/100$, $1/1000$ etc.

39: Opgaven tester et definitorisk aspekt af *decimalbrøkbegrebet*, jf. også Spm. 38. Svares "ja", er der antagelig tale om en misforståelse af decimalbrøkbegrebet, fx baseret på en ukorrekt generalisering af $0,1 = 1/10$, til en generel *konvention*, dvs. $0,n = 1/n$. Om dette er tilfældet kræver nærmere undersøgelse. Svares "nej" til spørgsmålet, antydes, at eleven ikke har dannet sig denne fejlopfattelse.

40: Opgaven tester *ordningen af brøker og decimalbrøker* samt samspillet mellem dem. Svares "nej", kan der være grund til at lodde baggrunden for svaret – fx om eleven straks ser, at $9/11 < 1$, eller om svaret støttes på en decimalbrøksudregning af $9/11$. Svares "ja", er der basis for nærmere undersøgelser af baggrunden.

41: Opgaven tester forståelsen af *tallinjen* og de *rationale tals tæthed* i kombination med samspillet mellem brøker og decimalbrøker. Svares "uendeligt mange" eller noget ækvivalent, antydes, at eleven har annammet vigtige dele af denne forståelse. Alle andre svar – fx "to, nemlig $0,3$ og $0,4$ " eller "14, nemlig $0,29$, ..., $0,42$ ", antagelig baseret på afrundede lommeregnerudregninger af de to brøker på decimalform, eller "det kan jeg ikke sige" (måske baseret på at der er for mange cifre i lommeregnernes decimalbrøkfremstilling) - kalder på nærmere undersøgelser. Jf. i øvrigt det duale Spm. 42.

42: Opgaven tester forståelsen af *tallinjen* og de *rationale tals tæthed* i kombination med samspillet mellem brøker og decimalbrøker, dualt til Spm. 41. Svares "uendeligt mange" eller noget ækvivalent, antydes at eleven har annammet vigtige dele af denne forståelse. Svares "ingen", antydes basale problemer i forståelsen af brøk- og eller decimalbrøkbegrebet. Svares "ét, nemlig $655/1000$ " eller "9, nemlig $651/1000$, $652/1000$, $653/1000$, $654/1000$, $655/1000$, $656/1000$, $657/1000$, $658/1000$, $659/1000$ ", antydes nogen forståelse af sammenhængen mellem brøker og decimalbrøker, mens der antagelig er problemer med forståelsen af tallinjens indretning eller decimalbrøkbegrebet.

43: Opgaven tester *brøkbegrebets rækkevidde* samt aspekter af *symbol- og formalismekompetencen*, idet der er tale om brøker af brøker. Rigtige svar, "2 og $21/41$ ", peger på at eleven har styr på disse ting i denne sammenhæng. Svares " $0,5/0,25$ " til det første spørgsmål og "?" eller lignende til det andet, antydes at eleven ikke er på det rene med begrebet "sædvanlig brøk". Svares til det første spørgsmål noget i stil med "resultatet er 2, men det er jo et helt tal og ikke en brøk", antydes at eleven ikke har annammet brøkbegrebet og talområdernes hierarki fuldt ud. Svares " $2/4$ " eller " $1/2$ " til det første spørgsmål, er det tænkeligt at eleven har "bortforkortet" den fælles tæller i de to brøker, og dermed har tydelige problemer med brøkbegrebet. I nærmere undersøgelser kan eleven anmodes om at opskrive $2,1/4,2$ og $2,1/4,5$ som sædvanlige brøker.

44: Opgaven tester *variabelbegrebet* i en algebraisk sammenhæng der omhandler geometri. Svares "1", er alt vel i denne sammenhæng, idet eleven kan udnytte formlen for et rektangel med variable (og reciprokke) sider. Svares "det kan man ikke vide, for vi kender ikke s", eller noget tilsvarende, er det tænkeligt at eleven har problemer med variabelbegrebet, eventuelt tillige med arealet af et rektangel. Om det ene eller det andet er tilfældet, kan man undersøge nærmere, fx ved at spørge hvad arealet er for konkrete værdier af s. Svarer eleven noget i stil med " $2s+2\cdot 1/s$ ", foreligger der en forveksling af areal med omkreds, men næppe noget problem med variabelbegrebet.

45: Opgaven tester forståelsen af *elementær analytisk geometri* – herunder *koordinatsystemet*. Svares $(9/2, -9/2)$ eller $(4\frac{1}{2}, -4\frac{1}{2})$ er det tænkeligt, at eleven har styr på koordinaterne til midtpunktet af et linjestykke. Svares " $[(2,-7)+(7,-2)]/2$ " har eleven forstået centrale dele af den algebraisk-geometriske struktur, men har ikke været i stand til, eller bekymret sig om, at udnytte dette til at nå et resultat gennem regning. Giver svaret " $(0,0)$ ", har eleven været i stand til at fortolke og udnytte oplysningerne i spørgsmålet, om end ikke korrekt, idet dette ville være svaret på et spørgsmål om midtpunktet af linjen med endepunkterne (fx) $(2,-7)$ og $(-2,7)$. Der er basis for videre undersøgelser af kilderne til forkerte svar, om muligt støttet af elevens eventuelle tegninger.

46: Opgaven tester tilegnelsen af *den rette linjes ligning i analytisk-geometrisk forståelse*. Der er mange veje til et korrekt svar, fx "ligningen må have formen $y = ax$, og da $(1,3)$ skal ligge på linjen, må $3 = a \cdot 1 = a$. Ligningen er altså $y = 3x$ ", eller "hældningskoefficientener $(3-0)/(1-0) = 3$, så ligningen har formen $y = 3x+b$, og da $(1,3)$ tilfredsstiller ligningen, må $b = 0$, ergo $y = 3x$ ",

eller korrekt aflæsning fra linjen tegnet i et koordinatsystem. Der er mange kilder til forkerte svar, fx " $y = 1 \cdot x + 3$ " eller " $3y = x$ ", begge dele baseret på fejlopfattelse af samspillet mellem parametrene i linjens ligning og punkter på linjen, evt. en ukorrekt forståelse af konventionerne for opskrivning af linjens ligning. Der er i høj grad brug for at nå frem til årsagerne til fejlsvar, da der ofte er dybtliggende forbindelser til væsentlige misforståelser på andre matematiske felter.

47: Opgaven tester *funktionsbegrebet*, nærmere bestemt sammenhængen mellem *begrebsdefinition og begrebsbillede*. Svares korrekt (nej,ja,ja,ja,ja,ja) på alle spørgsmål antyder et godt greb om funktionsbegrebet. Fejlsvar giver anledning til undersøgelse af årsagerne. Typiske fejlsvar er: "ja" til A, fordi eleven hæfter sig ved grafens form, ikke dens placering i koordinatsystemet; "nej" til B, fordi grafen knækker, eller fordi eleven ikke kan finde en regneforskrift der virker på hele akse; "nej" til C, fordi grafen ikke varierer, sådan som det plejer at gælde for funktioner, hvor jo funktionsværdien skal variere med x-værdien; "nej" til D, fx fordi der åbenbart er tale om to forskellige funktionsforskrifter for negative, hhv positive værdier af, i strid med sædvanen i gymnasiet; "nej" til E, fordi funktionen springer i 0, atter i strid med sædvanen, eller (igen) fordi der ikke er en genkendelig fælles forskrift på hele akse; "nej" til F, fordi funktionen har en "forkert" værdi i 0; den springer og er altså diskontinuert, i strid med sædvanen.

48: Opgaven tester *talbegrebet* vedrørende rationale og hele tal og disses *ordning*. Svaret "-1, 0, 1, 2, 3" antyder ingen problemer i denne sammenhæng. Svares "1, 2, 3" eller "0, 1, 2, 3" foreligger der sandsynligvis en begrebsforveksling mellem hele og naturlige tal, henholdsvis mellem hele og ikke-negative hele tal. Svares "-1, 1, 2, 3", er der grund til at tro, at eleven nærer den forestilling at 0 ikke er et (helt) tal. Som sædvanlig er der grund til at efterspore kilden til fejlsvar i denne opgave. Svares der endelig "-2,-1, 0,1,2,3", er det sandsynligt, at ordet "mellem" er fortolket inklusive heltallige endepunkter.

49: Opgaven tester *det rationale talbegreb* og de rationale tals fordeling *på tallinjen* (nærmere bestemt de rationale tals tæthed). Svares noget i stil med "Nej, man kan komme vilkårligt tæt på 4, uden at nå 4", eller "Tallene 3,9, 3,99, 3,999, ..., 3,99...9, ... (n decimaler) bliver stadig større og nærmer sig 4 uden nogensinde at nå 4, når antallet af decimaler vokser", eller "Uanset hvor tæt et tal er på 4, ligger der tal imellem, som er tættere på", har vi vist at gøre med en elev, der har styr på disse sager. Svares "Ja, 3,99... med uendeligt mange 9-taller" har vi at gøre med en elev, der har styr på noget vigtigt, men "blot" ikke ved, at $3,999... = 4$. Svares "3,9", "3,99", eller noget tilsvarende med endeligt mange decimaler, er der grund til at antage, at eleven ikke har fuld klarhed over decimalbrøkbegrebet. Svares "ja, 3" er der grund til at tro at eleven med "tal" tænker på naturlige tal, dvs. ikke opererer med et udvidet talbegreb.

50: Opgaven tester *lighedstegnets symmetri* (vi "ved", at lighedstegnet slet ikke er så symmetrisk i elevernes bevidsthed, som vi "tror"). Svares "ja", kan det være interessant at lodde dybden af forståelsen ved efterfølgende at spørge "hvis $7 = x$, er så $x = 7$ ", eller "hvis

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, er så $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$?. Svares "nej" til opgavens spørgsmål, er der i høj grad brug for opfølgning.

51: Opgaven tester *konventionstilegnelse* i samspil med forståelsen af *talordningen*, nærmere bestemt asymmetrien af den skarpe ordning. Svares "nej", kan dybden i forståelsen loddess med spørgsmål som "hvis $a \leq b$, er så $b \leq a$?", der leder hen til logisk variable udsagn, som kan skærpes ved at spørge "hvis $a \leq a$, er så $a \leq a$?". Svares "ja" til Spm. 51, er der brug for opfølgning, fx med spørgsmål som "hvis $3 < 7$, er så $7 < 3$?". Jf. i øvrigt Spm. 52.

52: Opgaven tester *konventionstilegnelse* i samspil med forståelsen af *talordningen*, samt basal *logik*, jf. Spm 51. Svares "ja", er der næppe grund til at forfølge sagen yderligere, med mindre der blev svaret forkert til Spm. 51. Svares "nej", er der behov for opfølgning, som fx kunne starte med nogle spørgsmål à la "hvis $3 < 7$ er så $7 > 3$?", eller "hvis $-3 < 0$, er så $0 > -3$?", og mere giftigt: "hvis $7 < 3$, er så $3 > 7$ ", der stiller skarpt på implikationen i forhold til sandhedsværdien af de indgående udsagn, her navnlig præmissen.

53: Opgaven tester *symbol- og formalismekompetencen* i sammenhæng med *brøker*, hvori der indgår ubestemte tal. Svares "ja" til spørgsmålet, er det ret tænkeligt, at eleven opererer med en "regel" der siger, at en brøk, hvor både tæller og nævner er givet som differens, henholdsvis sum af to led, kan brøken omformes til en differens mellem to brøker dannet af henholdsvis første- og andetleddene. Denne fortolkning kan efterprøves ved diverse brøker, hvor a og b gives konkrete talværdier. Svares rigtigt i sådanne situationer, er der grund til at tro, at det er selve symbolbrugen, der giver anledning til vanskeligheder. Svares "nej" til Spm. 53, er der grund til at udfordre dybden af forståelsen med variable a og b, fx ved at spørge hvad der sker, hvis $a = b = 1$. Detektion kan i øvrigt med fordel gennemføres ved at inddrage svaret på Spm. 56. Jf. tillige Spm. 55. Anfører eleven, at brøkerne kun er defineret, hvis $b \neq 0$ og $b \neq -1$, har eleven stor forståelse for brøkbegrebet.

54: Opgaven tester *brøkbegrebet* i sammenhæng med negative tal og dermed forbundne dele af *symbol- og formalismekompetencen*. Svares " a/b ", er der ikke noget at komme efter i denne sammenhæng. Svares " $- a/b$ " er der grund til at undersøge, om fejlkilden er en ukorrekt forståelse af forlængning, af fortegn, eller af manipulationsreglerne. Et tilsvarende behov foreligger, hvis der korrekt, men ufuldstændigt, svares " $(-a)/(-b)$ ". Elevopmærksomhed på undtagelsestilfældet $b = 0$ bør vække opmærksomhed.

55: Opgaven tester først og fremmest forståelsen af *brøkbegrebet* i samspil med *omformning af brøker*, men også mere basalt *algebraiske konventioner* m.m. Svares "Ja, for $(a+3)/(a+4) = 3a/4a = 3/4$ ", har eleven problemer på det sidstnævnte felt. Svares "ja, hvis $a = 0$ ", har eleven (korrekt) behandlet en anden opgave end den anførte. Svares "ja" uden nærmere begrundelse, bør kilden efterspores. Undervejs kan der være god mening i at testen rækkevidden af elevens "ja" ved at involvere forskellige værdier af a. Svares "nej, for $(a+3)/(a+4) = 1 + 3/4$ " har eleven en gal forståelse af omformning af brøker, jf. Smp 53, samt sandsynligvis af variabelbegrebet. Svares blot "nej", er der behov for nærmere undersøgelser af grundlaget for dette korrekte

svar. Jf. i øvrigt Spm 56. Atter er elevopmærksomhed på undtagelsestilfældet $a = -4$ værd at hæfte sig ved.

56: Opgaven tester – i samspil med Sp. 53 – tilegnelsen af reglerne for *omformning af brøker*, her nærmere bestemt indflydelsen, eller manglen på samme, af regneoperationerne i tæller og nævner. Svares ”Ja”, er der grund til at undersøge, om eleven tror at $(a-1)/(b-1) = (-1)a/(-1)b = a/b$, eller om eleven opererer med en forestilling om, at når det samme tal subtraheres i både tæller og nævner, er brøken uforandret. Elevens ”ja” kan udfordres ved at betragte forskellige værdier af a og b , fx $a = 1$ og $b = 2$. Svares ”nej”, er der basis for at undersøge dybden af svaret. Elevopmærksomhed på undtagelsestilfældene $b = 0$ og $b = 1$ vidner om et væsentligt træk ved forståelse af brøkbegrebet.

57: Opgaven tester *brøkbegrebet* samt *symbol- og formalismekompetencen* i en sammenhæng hvor der er mange omstændigheder på færde: variable, fortegnsskift, brøker hvis nævner og tæller er hinandens modsatte, etc. Svares ”-1” uden uddybning, er der grund til at checke grundlaget for svaret. Svares ”det kan man ikke vide, når man ikke kender x ”, har eleven antagelig ladet sig lede af tilstedeværelsen af den ukendte variabel x , uden at inddrage kendskab til brøkens form. Indgår kommentarer som ”brøken er ikke defineret, hvis $x = 1/3$ ” i elevens svar, har denne fanget noget væsentligt vedrørende brøkbegrebet (og tallet 0). Svares ”0” eller ”-2” er det, jf. Smp 53 og 56, muligt at eleven har foretaget omskrivningen ” $(3x-1)(-3x+1) = 1 - 1 = 0$ ” eller ” $(3x-1)/(-3x+1) = -1 - 1 = 2$ ”. I alle fald er der grund til at efterspore årsagen til de fejlagtige svar.