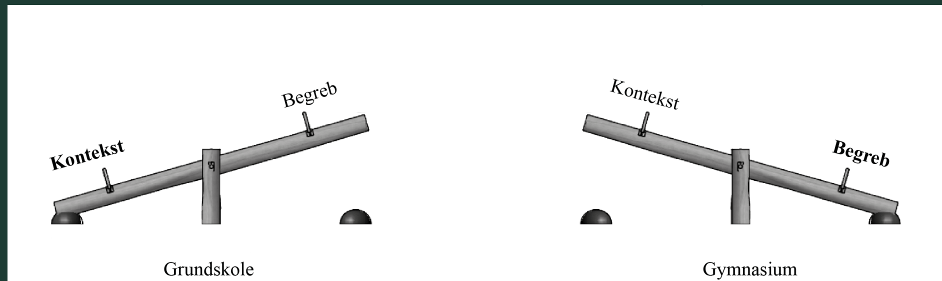
Symboler, symbolroller og forståelse af formler

Slagelse d. 5. december 2023

Aalborg, d. 13. december 2023



Marit Hvalsøe Schou

Medlem af NCUMs tværgående ekspertgruppe og matematiklærer på Odense Tekniske Gymnasium.

NCUM Nationalt Center for Udvikling af Matematikundervisning

Plan

- Lidt om overgangen fra grundskole til gymnasium
- Symboler i matematik – hvilke roller indtager de, og hvordan får de mening?
- Når symbolerne sættes sammen: forståelse og brug af formler
- Gruppearbejde om formler i undervisningen

- Kaffepause

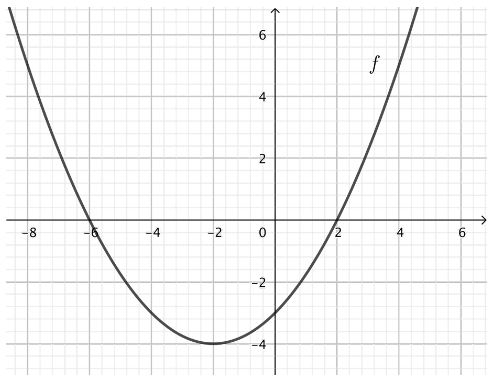
Måske har I også oplevet…

Elever, der:

- giver sig til at løse ligningen (isolere *x*)
  $$2x + 7 = 17$$
  når man spørger om 5 er en løsning?

- mener at hældningen for den rette linje
  $$y = ax + b$$
  er ax

- godt kan differentiere og integrere funktioner som
  $$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 3$$
  men ikke kan udpege punktet (4, *f* (4)) på grafen.

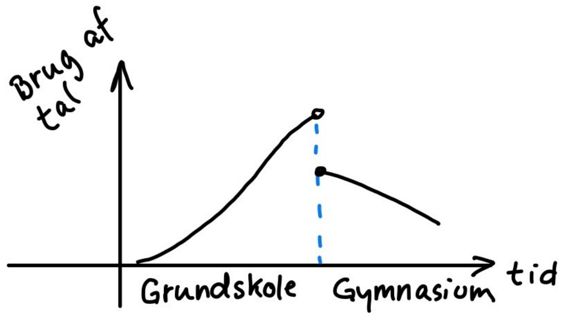


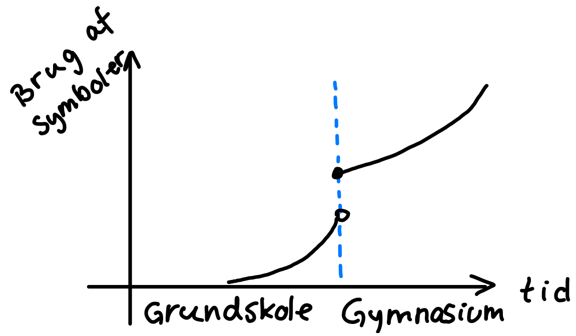
Overgangen set i et tal- og algebraperspektiv
Hvad er problemet?

- Matematik er et helt andet fag

Grundskole Gymnasium

- Undervisningen og dens indhold skifter karakter
  - Antallet af tal og symboler
  - Hvordan man bruger symbolerne
  - Undervisningens opbygning

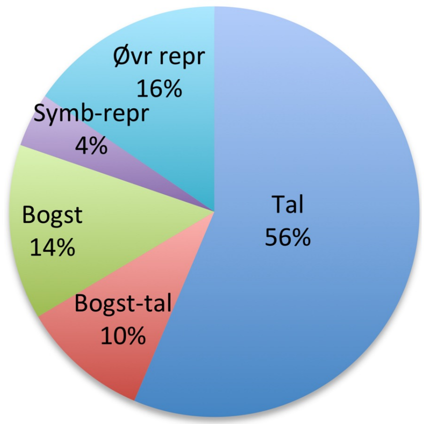




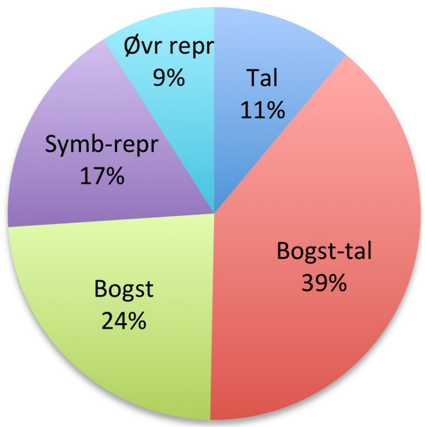
Antallet af (tal og) symboler

- Tal er den altdominerende repræsentationsform i grundskolen, men fylder meget mindre i gymnasiet.
- Omvendt fylder abstrakte symboler meget i gymnasiet og kun lidt i grundskolen
- Gymnasielærerne taler ikke om symbolerne – de taler med dem!

Forskellige repræsentationsformer



Grundskolen



Gymnasiet

Undervisningens opbygning

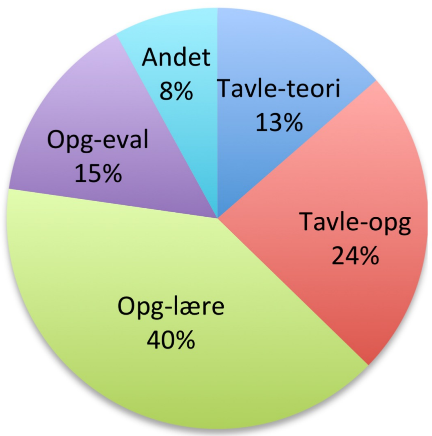
I **grundskolen** arbejder man meget med tal.

- Læreren præsenterer forholdsvis lidt ”teori” med symboler.
- Eleverne lærer ved at regne opgaver, hvor man argumenterer forfra hver gang.

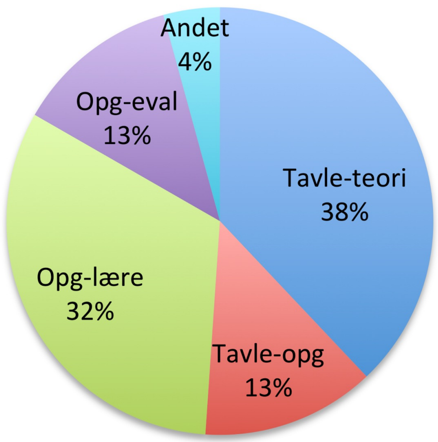
I **gymnasiet** er der en meget tydelig cyklus:

- Læreren definerer størrelser vha. deres abstrakte symboler
- der opskrives et regneudtryk, etc. (arg. og syntaks)
- konkret taleksempel eleverne reproducerer

Aktiviteter i undervisningen



Grundskolen



Gymnasiet

Symboler i matematik – hvilke roller indtager de, og hvordan får de mening?

MATEMATIKDIDAKTIK.DK

[Dagtilbud](#)

[Grundskole](#)

[Erhvervsskole](#)

[Gymnasie](#)

Dagtilbud

- Mission Matematik i dagtilbud
- At tælle
- Børns forståelse af former
- Matematik og sprog
- Matematisk opmærksomhed
- Mønstre og symmetrier
- Måling
- Oplæg til personalemøder
- Rumlig opmærksomhed
- Talforståelse
- Videoer dagtilbud

Grundskole

- Talblindhed
- Algebra på de yngste klassetrin
- At regne med etcifrede tal
- At regne med flercifrede tal
- Kompetenceorienteret matematikundervisning
- Matematiske ræsonnementer
- Modellering
- Teknologiforståelse
- Undersøgende matematikundervisning

Gymnasium

- Digitale teknologier
- Matematisk modellering
- Ræsonnementer i matematik
- Undersøgelsesbaseret matematikundervisning i gymnasiet

Erhvervsskole

- Algebra i erhvervsskolen
- Læringsstile
- Matematisk modellering på erhvervsskoler
- Motivation og selvtillid
- Positionssystemer
- Samspil mellem matematik og erhvervsfag
- Talblindhed
- Test og kortlægning
- Ældre elever på erhvervsskoler

Tværgående

- Algebra på tværs
- Digitale værktøjer i matematikundervisningen og instrumentel orkestrering
- Epidemimatematik
- Lektionsstudier
- Matematikangst
- Planlægning af matematikundervisning
- Stokastik

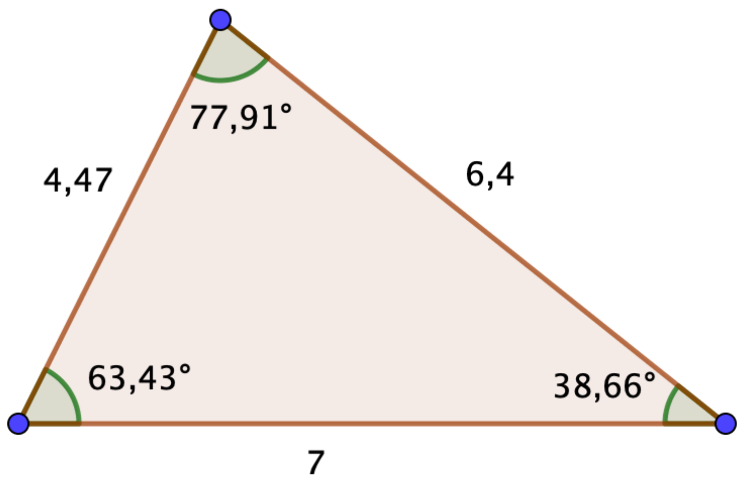
Algebra på tværs og
Formler og symbolske udtryk

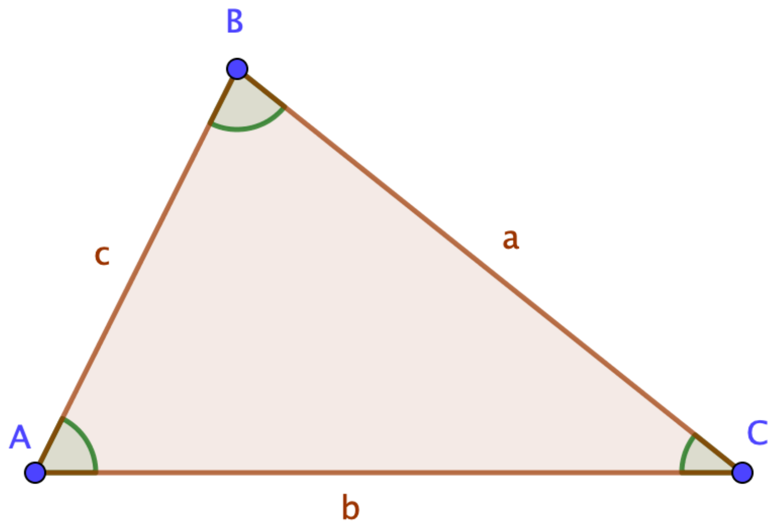
Nu tager vi udgangspunkt i to temaer fra NCUM:

I det ene ser man på hvordan arbejdet med algebra ændrer sig fra grundskolen til gymnasiet, og hvordan man vi hjælpe eleverne med at gøre overgangen lettere. I dette tema kan man finde eksempler på hvordan algebra kan bruges på mange måder til at støtte elevernes læring. Alle eksempler kan benyttes på begge sider af overgangen mellem grundskole og gymnasium/EUD.

I det andet ser vi nærmere på formler i matematik, og på de udfordringer nogle elever oplever, når de bruger formler. Vi ser også på, hvordan man i undervisningen kan arbejde med formler, så eleverne får bedre muligheder for både at forstå deres indhold, og hvad man kan gøre med dem.

Brugen af tal og symboler – hvad står symbolet for?





I algebra står symboler altid for tal

Frit slag ved navngivning

I matematik har vi kun ganske få faste betegnelser
fx π og e (π = 3.14159265359… og e = 2,718281828459….)

Ellers må vi helt selv bestemme:

$y = a \cdot x + b$

$y = m \cdot x + b$

$y = k \cdot x + m$

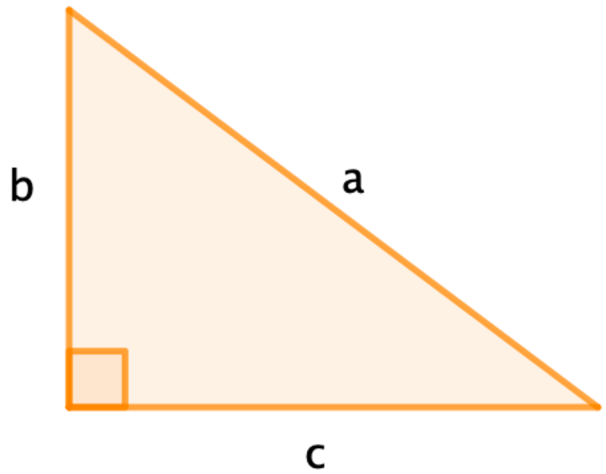
$y = b \cdot x + a$

Vi har dog uskrevne regler, fx at *x* er den uafhængige og *y* den afhængige variabel.

Et klasseeksempel med en uskreven regel

Pythagoras læresætning!

Er det rigtigt at $a^2 = b^2 + c^2$?



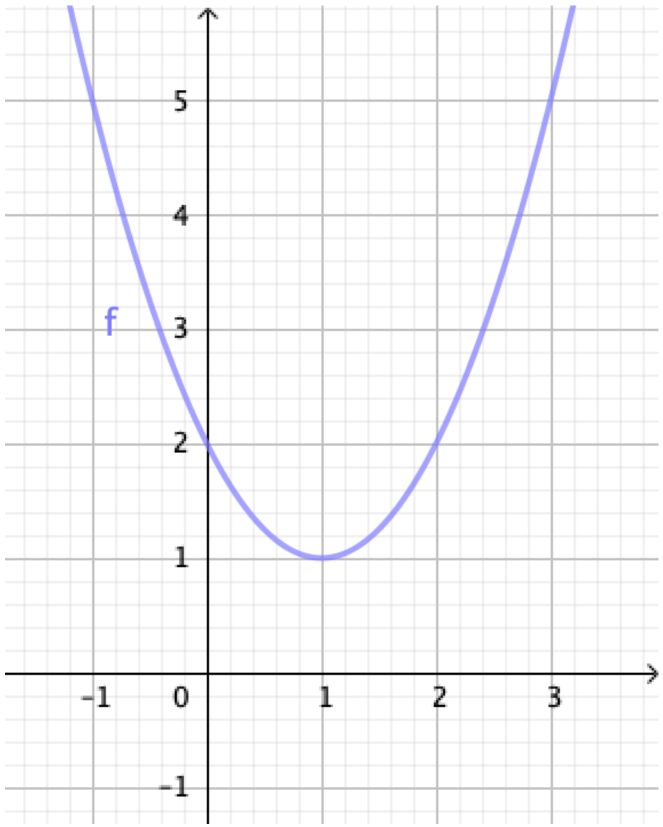
De uskrevne regler giver problemer

- Vi bruger ofte 1. bogstav i alfabetet ***a***

  $y = a \cdot x + b$
  $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

  Så parablen har da helt klart hældningen *a*!

- Har I andre eksempler på lignende misforståelser?



Tre måder at bruge symboler på (herunder talsymboler)

- Notation
  $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
  $a^n = a \cdot a \cdot \cdots \cdot a$

- Omformninger/beregninger efter gældende regneregler

- Symbolske udtryk i sætninger, der gælder pga. deres matematiske indhold (bevisførelse)

Så hvad er pointen?

- Mange eleverne oplever matematik som et helt nyt fag, når de starter i gymnasiet

- Vi underviser meget forskelligt før og efter overgangen
- Det hjælper, hvis **vi ved noget om hinandens undervisning**

- Tal og algebra er en meget væsentlig bestanddel af matematikken med mange interne problemer og fælder.

- Det hjælper, at **vi er bevidste om hvorfor algebra er svært**.

Formler i matematikundervisningen

- Hvad sker der, når vi sammensætter symboler, der kan have SÅ mange forskellige betydninger til udtryk, som vi kalder **formler**?

- Og hvad er overhovedet en **formel**?

Hvad siger formelsamlingen?

Kig selv i fx Formelsamlingerne til prøven i Mat A på STX/HHX/HTX
og Formel- og tabelsamling for grundskolen (UVM)

Her er ”formelbegrebet” meget bredt!

Formler i litteraturen

En formel kan defineres som to symbolske udtryk kædet sammen af et lighedstegn, hvor der kun kræves direkte beregninger på kendte tal.

(Claude Janvier)

En formel består af to symbolske udtryk forbundet med et "=" tegn, der udtrykker, at noget er ens i en given ***kontekst****. Nogle af de algebraiske symboler refererer til mål, som stammer fra denne kontekst, og de kan enten være faste eller variable og enten kendte eller ukendte.*

(Schou og Bikner-Ahsbahs)

Hvordan opfatter eleverne formler?

- Identitet
- Form
- Opskrift
- Ligning
- Blueprint
- Læsning
- Sam-ændring

Identitet: objekt er identisk med formel

Form: Formen (opskrivningen) bestemmer betydningen

Opskrift: En opskrift til beregning

Ligning: Der skal omformes

Blueprint: Formlen beskriver en konkret sammenhæng

Læsning: Betydningen skal afkodes

Sam-ændring: En ændring i en af størrelse fører til en bestemt ændring i en anden størrelse, fx som en funktion.

Identitet

- Når man ser en formel som identitet, betyder det, at man opfatter formlen og det objekt, som formlen siger noget om, som det samme.
- Fx er $A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$ det samme som en trekant, eller $V = h \cdot G$ er et prisme. Man identificerer altså objektet ved formlen på samme måde som man identificerer det ved et navn.
- Ved identitet kan man ikke bruge formeludtrykket til andet end identifikation.

Form

- Her er det formlens udseende, altså den måde den er skrevet på, der er altafgørende.
- To ækvivalente formler, som er skrevet forskelligt, vil med dette blik opfattes som forskellige formler, også selvom man ved brug af grundlæggende regneregler kan omforme den ene til den anden.
- Fx vil nedenstående være forskellige formler, der potentielt har forskelligt indhold.

$A = 2\pi r(h + r)$ og

$A = 2\pi rh + 2\pi r^2$ og

$A = 2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2$

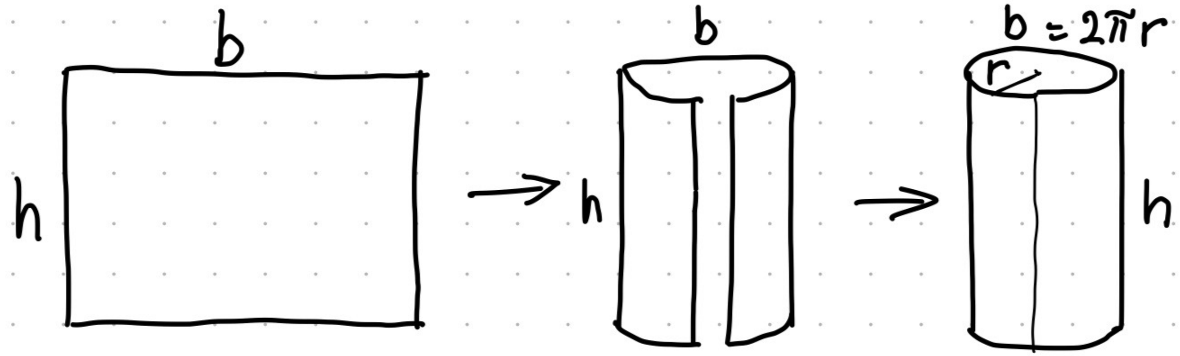
Opskrift

Med dette blik skal formlen være skrevet på en bestemt måde:

- Først kommer et symbol, som står for den størrelse, man ønsker at finde, og som beskriver en bestemt egenskab ved konteksten fx en afstand, et areal eller et rumfang.
- Dernæst kommer et lighedstegn, som signalerer ”beregn”.
- Tilslut kommer selve ”opskriften” på, hvordan resultatet kan beregnes, dvs. hvilke tal der skal indsættes og hvilke regneoperationer, der skal udføres.

Ligning

- Dette blik på en formel adskiller sig fra de øvrige, ved at selve konteksten **ikke** betyder noget. Når man ser formlen som en ligning vil man omforme den, fx flytte rundt på led, gange ud og ind af parenteser osv.
- Formlen ses som en sammenhæng, der består af tal og symboler, regneoperationer og et lighedstegn, hvor lighedstegnet signalerer "omform".
- Hvad symbolerne står for i konteksten er uden betydning. Her er de helt abstrakte tegn, man kan manipulere med.
- Fx kræver det "ligningsblikket" at komme fra $A = 2\pi rh + 2\pi r^2$ til $A = 2\pi r(h + r)$, der er den måde overfladearealet af en cylinder skrives på i mange formelsamlinger.

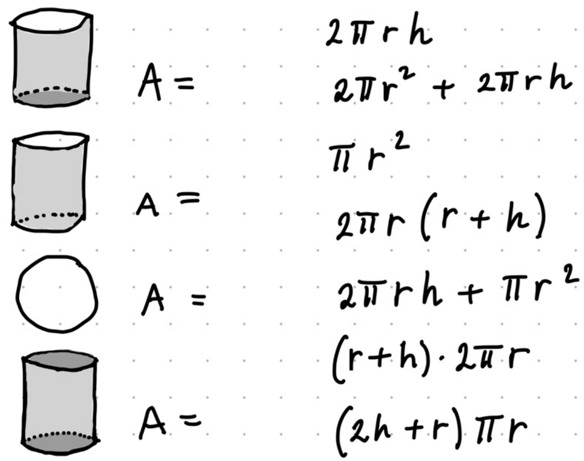


Blueprint

- Ordet ”blueprint” bruges som en beskrivelse af, hvordan noget kan bygges. Når en formel ses som et blueprint, fungerer den som en plan for hvordan et objekt i konteksten kan konstrueres udtrykt i et formelt matematisk sprog.
- Ønsker man for eksempel at opstille en formel for overfladearealet af en cylinder med bund og låg, kan man forme et rør af et stykke papir med sidelængderne højde, h, og omkreds, $2\pi r$ og tilføje to cirkelskiver. Hermed har man ”bygget” en cylinder, med overfladearealet $2\pi rh + 2\pi r^2$.
- Man vil ofte se at elever, der opstiller formler i en modelleringsproces, vil skrive de symbolske beregninger på venstre side af lighedstegnet og symbolet for det, de vil finde på højre side. Formlen bliver dermed $2\pi rh + 2\pi r^2 = A$. Lighedstegnet signalerer i dette tilfælde: ”navngiv”.

Læsning

- Med dette blik opfattes formlen som en tekst, hvor de enkelte dele af formlen fortæller om konteksten. Man læser altså mening ind i formlen.
- Vi ser igen på formlen $A = 2\pi r \cdot h + 2 \cdot \pi r^2$, der med et "læsningsblik" kan afkodes som arealet af et rektangel med sidelængderne h og $2\pi r$ samt to cirkelskiver hver med arealet πr^2. Det vil sige, at formlen beskriver overfladearealet af en cylinder med låg og bund.
- Bemærk at man kan hjælpe eleverne ved at skrive de gangetegn, der adskiller fx længde og bredde.



Sam-ændring

- Dette blik på en formel minder om en funktionsforståelse af formlen.
- Formlen viser, hvordan de symboler, der indgår, hænger sammen og ændrer sig sammen. Hvis man ændrer værdien af et symbol, påvirker det værdien af et eller flere af de andre symboler.
- Med et sam-ændringsblik på formlen for arealet af en trekant $A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$, kan man se at en fordobling af højden føre til en fordobling af arealet, når længden af grundlinje holdes konstant, hvorimod en fordobling af højden vil føre til en halvering af grundlinjen, hvis man ikke ændrer på arealet.

Elever som kompetente symbol- og formelbrugere

- Alle symbolroller og formelforståelser skal beherskes
- Der forventes en fleksibel brug af symboler og formelforståelser
- Uden ovenstående oplever eleverne problemer…

Gruppearbejde på tværs

Sæt jer sammen i grupperne, der står på jeres skilt.

Ideer til undervisning med formler

- I den almindelige undervisning er der mange muligheder for at inddrage forskellige forståelser af formler.
- Det kræver bare, at man er bevidst om de beskrevne formelblik og at man italesætter dem i de situationer, hvor de bliver brugt.
- Man kan også vise eleverne hvordan de i en enkelt opgave, sommetider er nødt til at veksle mellem forskellige formelblik.

Nu skal I i gang…

- Her vil vi tage udgangspunkt i nogle tidligere eksamensopgaver fra grundskolen og fra gymnasiet.
- Først et par eksempler på, hvordan man kan arbejde videre med opgaverne, så eleverne får mulighed til at arbejde med flere forståelser.
- Afhængigt af hvordan man behandler opgaverne, kan de bruges på tværs af grundskole, gymnasie og erhvervsuddannelse.

- Og så vælger hver gruppe nogle opgaver, som I får tid til at videreudvikle, så der kommer flere formelforståelser i spil.
- Tænk også gerne på hvordan opgaverne skal bruges.

Tak for i dag

Nationalt Center for Udvikling
af Matematikundervisning

matematikdidaktik.dk