



Brug af autentiske modeller i gymnasiet
Workshop 4 ved NCUMs årskonference
26.11.2025

1

Plan



- 13.30 Modeller og modellering i gymnasiet
Eksempel: Den salte syge - modellering af smittespredning
- 13.50 Analyse af eksemplet - hvordan kan det være eksemplarisk?
- 14.05 Inspiration til modelleringsforløb
- 14.10 Gruppearbejde om udvikling og diskussion af undervisningsforløb med udgangspunkt i egne ideer/erfaringer eller eksempler fra skemaet.
- 14.30 Pause undervejs med kaffe/te og kage/sødt (15 min.)
- 14.45 Fortsat gruppearbejde med planlægning af kort fremlæggelse
- 15.00 Runde med ideer til og analyse af modelleringsforløb. Ca. 5 min. til hver gruppe.
- 15.15 Spørgsmål til fælles drøftelse:
Hvilke krav skal forløbene opfylde for at kunne bruges i undervisningen?
Hvordan kan vi fremme integration af MM i undervisningen?
- 15.30 Slut

2

Modeller og modellering (MM) i læreplanerne, mat A (og B) på stx



I formålet for matematik A hedder det: ”Eleverne opnår fortrolighed med matematiske modeller som middel til at beskrive fænomener inden for naturvidenskab, teknologi og samfundsvidenskab.”

Blandt de faglige mål for matematik A og B indgår at

- anvende digitale værktøjer til modellering og matematisk problemløsning
- benytte matematik som middel til at formulere, analysere og løse problemer inden for faget selv eller andre fagområder og i relation til omverdenen
- opstille, bearbejde og fortolke matematiske modeller til beskrivelse af fænomener inden for forskellige fagområder samt diskutere modellens anvendelse og rækkevidde.

MM i gymnasiet som middel eller mål?

- (1) MM som didaktisk middel til at motivere og til at støtte elevernes læring af matematiske begreber og metoder.
- (2) MM som nødvendigt indhold til udvikling af matematisk modelleringskompetence som et selvstændigt mål for matematikundervisningen.

(Blomhøj & Højgaard, 2007), (Blomhøj, 2019)

3

Modelleringskompetencen og dens to sider



Generelt at kunne gennemføre matematisk modellering kræver besiddelse af matematisk modelleringskompetence. Den udgør en af de otte matematikkompetencer i KOM-projektet definerer matematikbeherskelse. Den har – som de øvrige kompetencer – både en analyserende og en udøvende side.

Den analyserende side af modelleringskompetencen dækker over at kunne analysere grundlaget for og egenskaberne ved foreliggende modeller og at kunne bedømme deres rækkevidde og holdbarhed. Hertil hører at kunne 'afmatematisere' (træk ved) foreliggende matematiske modeller, dvs. at kunne afkode og fortolke modelementer og -resultater i forhold til det felt eller den situation, som er modelleret.

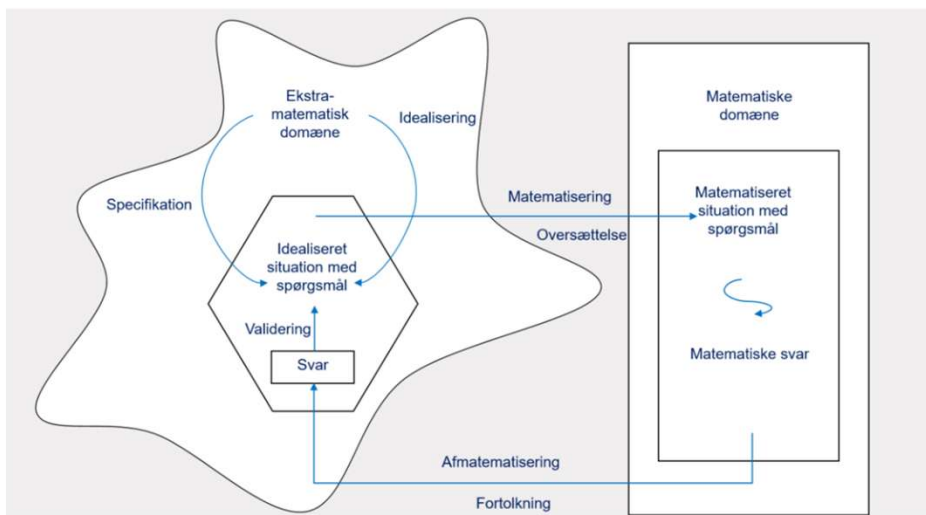
Den udførende side af modelleringskompetencen dækker derimod over at kunne udføre aktiv modelbygning i en given sammenhæng, dvs. at bringe matematik i spil og anvendelse til behandling af anliggender uden for matematikken selv. Dette dækker i alt væsentligt over at kunne gennemføre alle de forskellige processer i modelleringscyklussen. (Niss & Jensen, 2020)

Se NCUM temaet [Matematisk modellering](#).

4

Model af en modelleringsprocessen (Jankvist & Niss, 2020, s.469)

NCUM



For uddybningen af modellen se NCUM temaet [Matematisk modellering](#).

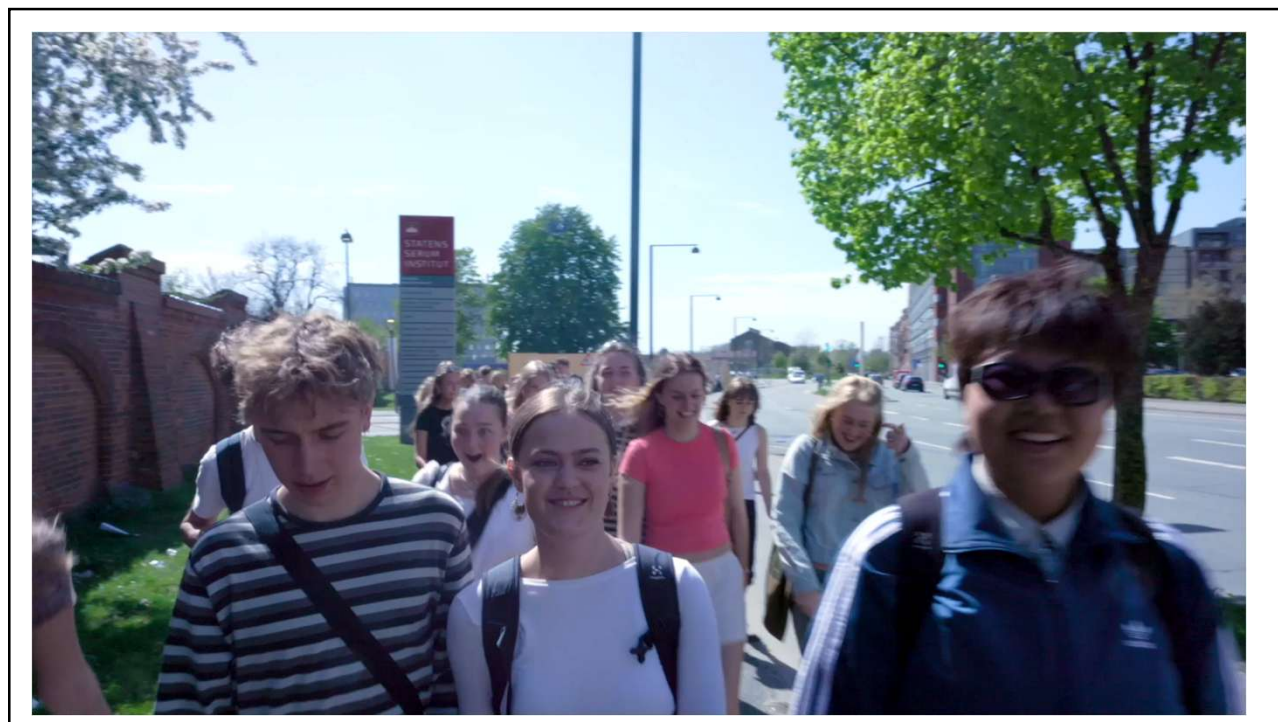
5

Den salte syge – simulering af smittespredning

NCUM

- Vi ser først et klip fra en video som NCUM har produceret i samarbejde med Statens Serum Institut. Klippet varer ca. 8 minutter og viser blandt andet et eksperiment til simulering af smittespredning, som kan gennemføres i en gymnasieklasse.

6



7

Den salte syge – forsøgsvejledning – se www.matematikdidaktik.dk

NC
UM

- Alle tager et plastikkrus med væske - dette er jeres “væskekrus” og et lille tomt krus - det er jeres “smagsprøvekrus”.
- Alle stiller sig derefter lidt spredt rundt i lokalet.
- Væsken er rent vand - undtagen i ét af krusene, der er en koncentreret saltopløsning.
- Inden starten smager alle på væsken ved at hælde lidt over i smagekruset, og smage på det. Smager det salt, er du “patient zero”! Du er den eneste smittede til at starte med.
- *VIGTIGT: Du skal holde masken og aldrig vise andre, at du er blevet smittet!*
- Nu starter eksperimentet og på et stopur på en stor skærm skifter tiden hver 30’te sek.
- Alle går rundt imellem hinanden og danner hurtigt par.

8

Den salte syge – forsøgsvejledning – se www.matematikdidaktik.dk

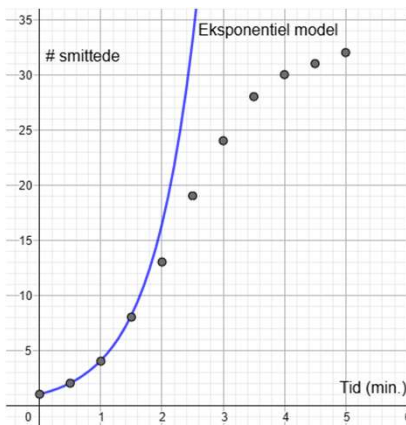
Når I mødes i par gør I følgende:

- Hæld al væske fra begge personers krus op i den ene persons væskekrus.
- Hæld lidt over i hvert af jeres smagsprøvekrus, og smag på det (husk: Ingen grimasser, da det ikke må afsløres, hvem der er smittet!)
- Del derefter væsken i lige store portioner i hvert jeres krus.
- Begge personer kigger nu op på stopuret (f.eks. vist på projektoren). Hvis du er blevet smittet, skal du memorere den tid uret viser!
OBS: I skal kigge op begge to hver gang, uanset om I er blevet smittet eller ej, så andre omkring jer ikke kan lure, om I er smittede eller ej.
- Find en ny marker (det må gerne være en I har mødt før) og gentag proceduren for et møde, uanset om du er smittet eller ej, indtil eksperimentet slutter.
- Der må ikke tales eller gestikuleres under eksperimentet.
Efter 7-10 minutter stoppes eksperimentet af læreren.

9

Den salte syge – data og modeller

	A	B	C	I
1	Tid	Nye I1	I1	
2	0	1	1	
3	0.5	1	2	
4	1	2	4	
5	1.5	4	8	
6	2	5	13	
7	2.5	6	19	
8	3	5	24	
9	3.5	4	28	
10	4	2	30	
11	4.5	1	31	
12	5	1	32	
13				



Antallet af smittede vokser i starten af epidemien eksponentielt og kontaktraten C kan derfor estimeres ved hjælp af eksponentiel regression på data for starten af epidemien. For $t < 2$ beskriver eksponentialfunktionen $y(t) = 1 \exp(1.4t)$ data C kan derfor estimeres til 1.4 kontakter per min.

<https://www.geogebra.org/classic/b9ptecyq>

10

Modellering af den salte syge



Forsøgsbeskrivelse til eksperiment med den salte syge findes [her](#)

Mål: Vi ønsker at beskrive og forudsige den tidlige udvikling i antallet af personer der smittede med den salte syge.

Variabel: Vi indfører følgende variable, der kan opfattes som funktioner af tiden t som uafhængig variabel.

S eller $S(t)$: Antal modtagelige individer (Susceptible)

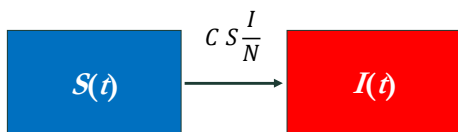
I eller $I(t)$: Antal smittende individer (Infectious)

Forsimplende antagelser:

- Populationen er konstant, N , under epidemien ($N = S(t) + I(t)$)
- Under epidemien forløber overførelsen: $S \rightarrow I$ (Man bliver altså ikke rask.)
- Alle personer har samme smitteadfærd. Dvs. alle har samme kontaktrate – alle udfører det samme antal kontakter per tid. Vi kalder denne rate for C .
- Hvis man er modtagelig og møder en smittende person, så bliver man smittet.

11

Kompartimentdiagram for modellen – en S-I model

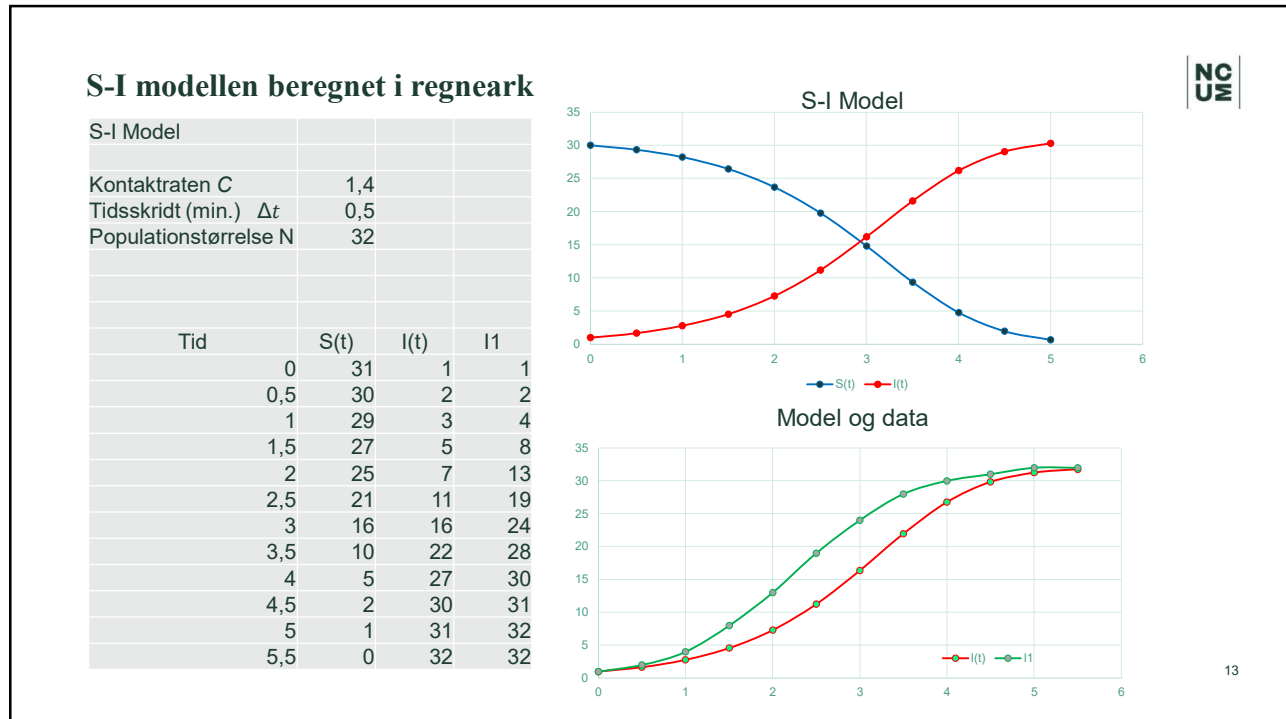
Vi ser på et lille tidsinterval Δt (hvor $C \Delta t \ll 1$). Det gør, at vi kan regne med S og I som om de er konstante. Så hvor mange nye tilfælde kan vi forvente i tidsinterval Δt ?

Hver modtagelig udfører (som alle andre) c kontakter per tid – dvs. de modtagelige udfører $c S(t) \Delta t$. Andel af disse kontakter som er med smittende kan beregnes som $I(t)/N$, når vi antager, at alle kontakter opstår uafhængig af om man er smittet eller ej. Herudfra kan vi beregne ændringerne over et tidsinterval Δt for $S(t)$ og $I(t)$. Vi får følgende differensligningsmodel:

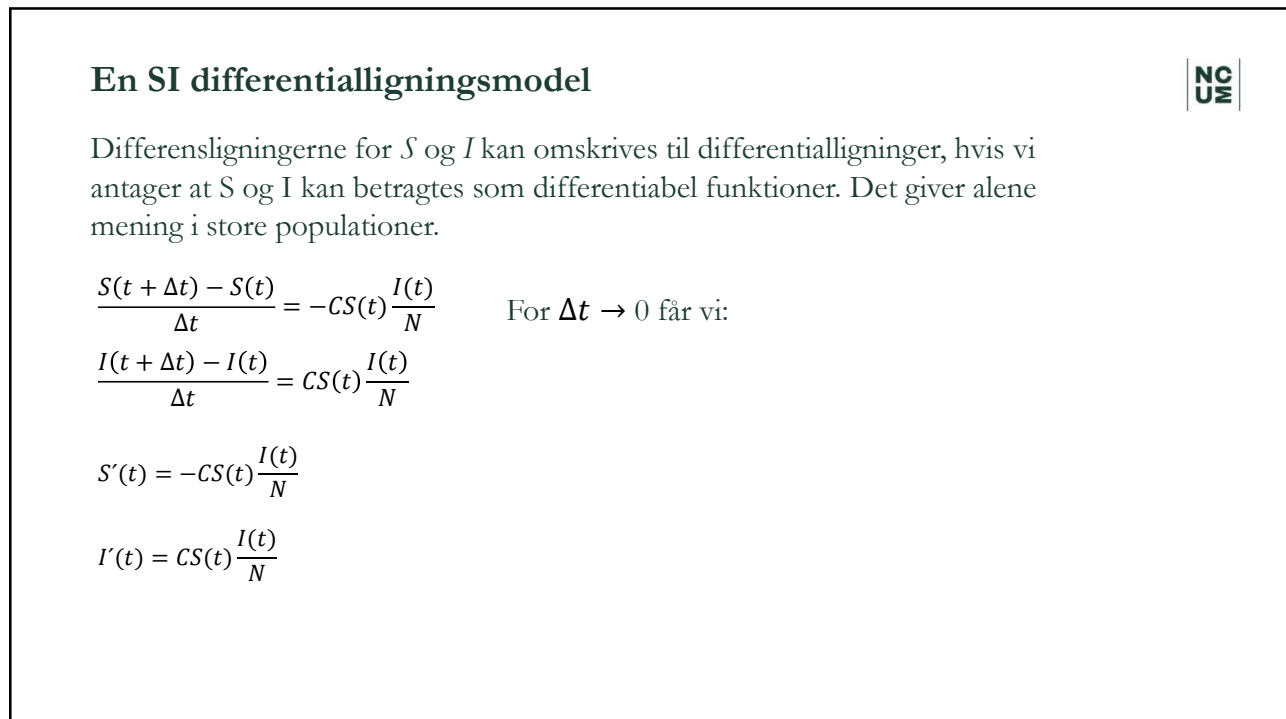
$$S(t + \Delta t) = S(t) - c S(t) \frac{I(t)}{N} \Delta t$$

$$I(t + \Delta t) = I(t) + c S(t) \frac{I(t)}{N} \Delta t$$

12

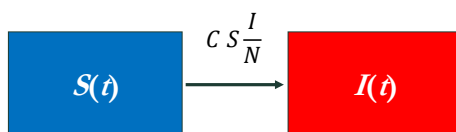


13



14

Fra kompartmentdiagram til differentialligningsmodel

Et kompartmentdiagram hvor strømmene ind og ud af de enkelte kompartments er angivet ved variable og parametre, kan oversættes direkte til et system af differentialligninger – en ligning for hver kompartment – efter ”ind – ud princippet”. Ændringsraten (differentialkvotienten) for hver kompartmentvariabel er summen af strømmene ind minus summen af strømmene ud af kompartmentet. Her er det simpelt, da der kun en strøm:

$$S'(t) = -cS(t)\frac{I(t)}{N}$$

$$I'(t) = cS(t)\frac{I(t)}{N}$$

15

En SI differentialligningsmodel



Ved at udnytte at $N=S+I$ og dermed $S=N-I$ kan vi løse differentialligningen for $I(t)$:

$$I'(t) = cS(t)\frac{I(t)}{N} = c(N - I(t))\frac{I(t)}{N} = \frac{c}{N} I(t)(N - I(t)).$$

Det er en logistik differentialligning, der med $I(0)=1$ har løsningen:

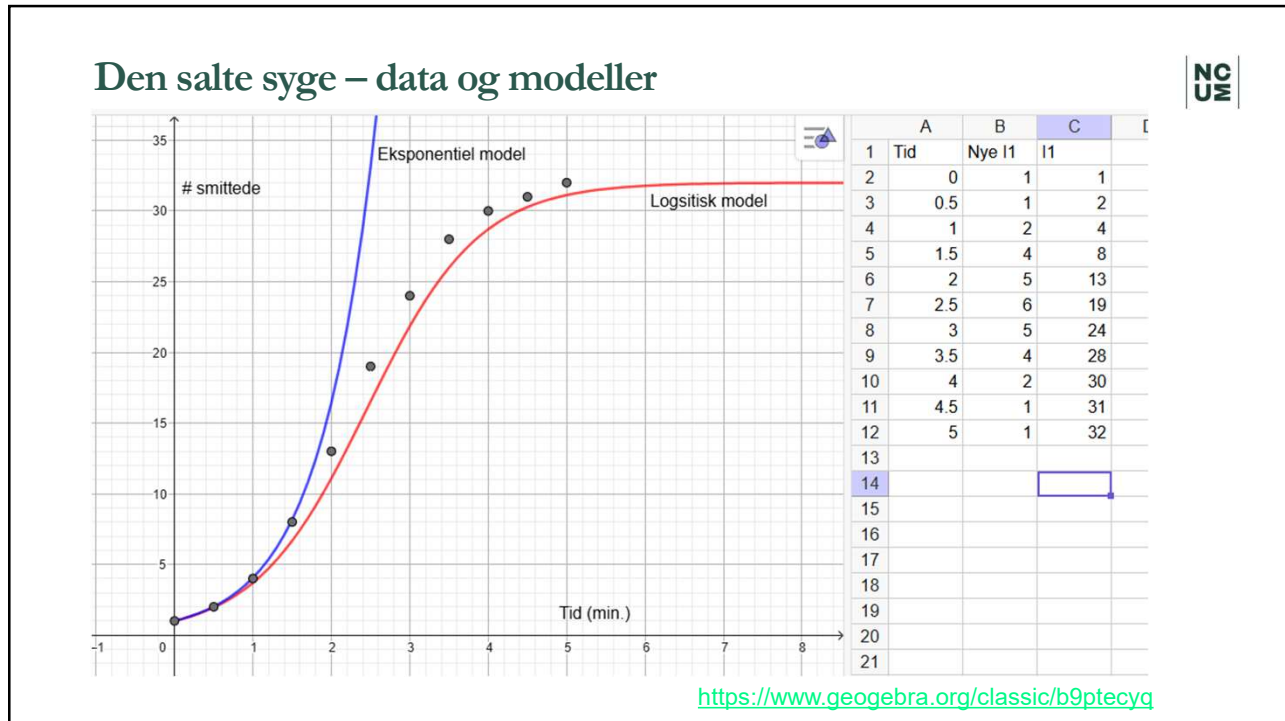
$$I(t) = \frac{N}{1 + (N - 1) e^{-c t}}$$

Hvis $I \ll N$, hvilket typisk er tilfældet i starten af en epidemi, så har vi:

$$I'(t) \approx c I(t) \Rightarrow I(t) = I_0 e^{c t}, \text{ hvor } I_0 \text{ er antal smittede til } t = 0$$

som jo en eksponentialfunktion. Heraf ses at kontaktraten C netop kan estimeres ved eksponentiel regression på data fra epidemiens tidligste fase.

16



17

Eksemplarisk læring

- Ikke bare **at bruge** eksempler, men
- Eksemplets **kvalitet**
 - Hvad er den enkelte case eksemplarisk for?
- Undervisnings kvalitet
 - Eksemplaritet skal **opleves**

Subjektivt
(Dewey, 1938)



Instrumentalt
(Wagenschein, 1956)



Task 1 (15 minutes of work in pairs)

Express the flow between $S(t)$ and $I(t)$ as well as between $I(t)$ and $R(t)$ by means of these functions and the two parameters c and v based the assumptions discussed.

In small time interval Δt (where $c \Delta t \ll 1$) the changes in each compartments can be calculated for time $t + \Delta t$.

Complete the difference equations:
 $S(t + \Delta t) = S(t) - \dots$

Kritisk
(Negt, 1975)

Blomhøj & Elicer (2021); Elicer (2020)



18

Eksemplaritet af forløb med den salte syge



- **Fænomenet:** Eleverne kender til smittespredning i forvejen. Nu opleves det i fællesskab i klassen, og kan skabe motivation for matematisk modellering til beskrivelse og forklaring af data og til undersøgelse af fænomenet.
- **Modelleringsprocessen:**
 - Eleverne producerer og repræsenterer selv data
 - Eleverne får grundlag for at forstå og forholde sig til idealisering af smittespredning ved eksperimentet den salte syge.
 - Eleverne kan selv gennemføre matematiseringen og når frem til en SI-model
 - Eleverne kan analysere modellen med matematik og værktøjer de kender.
 - Eleverne kan arbejde med kompartiment modellering af dynamiske systemer.
 - Eleverne kan validere deres model over for data de skal har produceret.
 - Eleverne kan arbejde med opstilling af en SIR-model ved udbygning af SI-model
- **Modellering som middel:** Eleverne arbejder med centralt fagligt indhold som, databehandling, regression, eksponentialfunktion, differens- og differentialligninger.

19

19

Eksemplaritet af forløb med den salte syge



- **Matematiske modellers samfundsmæssige rolle og funktion:** Modeller og modellering spiller en hovedrolle i relation til **samfundsmæssige kriser og risikofænomener**. Det gælder specielt og aktuelt ved de globale udfordringer og kriser som klimakrisen, corona-pandemien, finansielle kriser, og i forhold til bæredygtighed generelt. (Barwel, 2013; Skovmose, 2021; Blomhøj & Elicer, 2021)

Matematiske modeller anvendes inden for videnskab - især i naturvidenskab, samt i teknologiske og **samfundsmæssige sammenhænge** til at

- beskrive
- forklare
- forudsige
- kontrollere
- foreskrive

komplekse og ofte dynamiske systemer.

- **Den salte syge** er eksemplarisk ved, at eleverne kan opstille modeller, der kan beskrive og forklare data, de selv har produceret. De kan også opleve, at modeller kan bruges til at forudsige og forsøge at kontrollere epidemier ved at undersøge effekt af mulige indgreb.

20

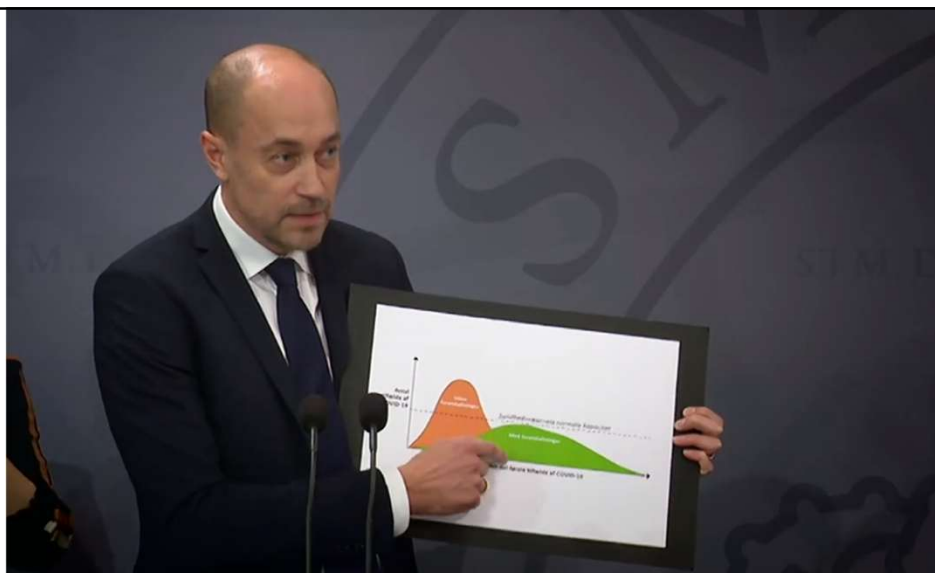
Eksemplaritet af forløb med den salte syge

➤ Autenticitet:

- Eksperimentet ”Den salte syge” skaber en virkelighed for eleverne og dermed en subjektiv oplevelse af autenticitet.
- Problemstillingen er objektivt autentisk og samfundsrelevant. Det har eleverne videns- og erfaringsgrundlag for at erkende.

21

21



Sundhedsminister Magnus Heunicke med “den røde og den grønne kurve” for udvikling af corona-epidemien i Danmark ved en presse konference den 10. marts 2020.

Kilde: regeringen.dk

22

Eksemplaritet af forløb med den salte syge



➤ Autenticitet:

- Eksperimentet ”Den salte syge” skaber en virkelighed for eleverne og dermed en subjektiv oplevelse af autenticitet.
- Problemstillingen er objektivt autentisk og samfundsrelevant. Det har eleverne videns- og erfaringsgrundlag for at erkende.
- Videoen kan skabe autenticitet ved, at eleverne oplever/bliver klar over, at SSI bruger matematiske modeller til at beskrive, forklare og forsøge at kontrollere epidemier.

Hvis eleverne efter forløbet kan svare på følgende spørgsmål, er det en indikation på oplevet autenticitet:

Hvor arbejdes med modellering af epidemier?

Hvem arbejder med modellering af epidemier?

Hvordan arbejdes der med modellering af epidemier?

Med hvilke mål arbejder man med modellering af epidemier?

23

23

The Where, Who and How of modelling and societal applications of models



Who, outside mathematics itself, actually uses it for anything?	Exactly which people are in fact using mathematics?
What for? Why? On what conditions? With what consequences?	When, and in what contexts and situations do they use it and for what purposes?
How? By what means? What is required to be able to use it?	In what ways do they use it, and what are the competencies they possess and activate for so doing?

Elicer & Blomhøj (2021)

24

Hvad kan autenticitet betyde i gymnasiet?

Aspekter af virkelige situationer, der er relevante ved simulationer (Palm, 2009)

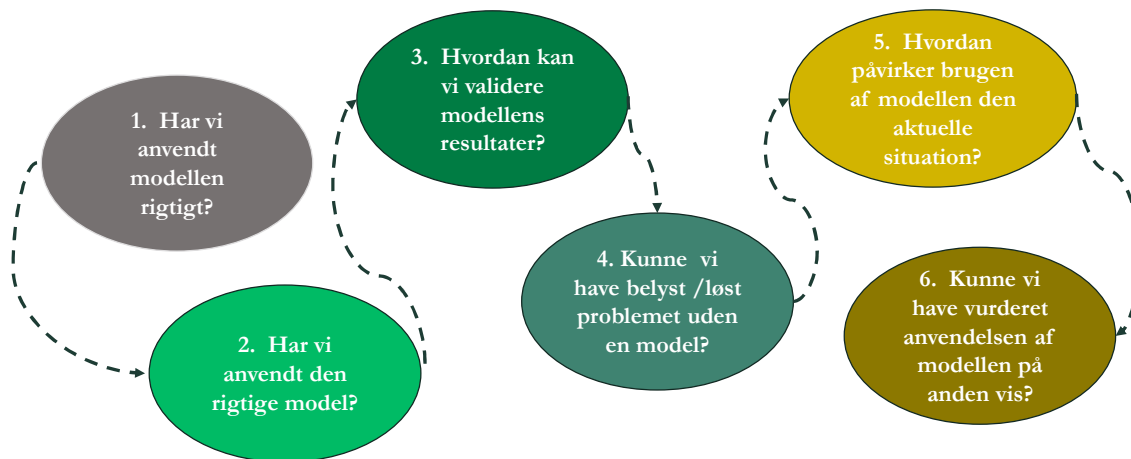
A. Begivenhed	F. Omstændigheder
B. Spørgsmål	F1. Tilgængelighed af eksterne værktøjer
C. Information/data	F2. Vejledning
C1. Eksistens	F3. Konsultation og samarbejde
C2. Realisme	F4. Diskussionsmuligheder
C3. Specificitet	F5. Tid
D. Præsentation	F6. Konsekvenser
D1. Måde	
D2. Sprog	
E. Løsningsstrategier	G. Løsningskrav
E1. Tilgængelighed	H. Formål i den figurativ kontekst
E2. Plausibilitet	

25

Generiske spørgsmål til kritisk refleksion ved brug af modeller

NC
UM

Skovmoses seks indgange til refleksion og kritik i matematikundervisningen fortolket i forhold til anvendelser af matematiske modeller:



(Skovmose, 1994)

26

To typer af refleksioner og kritik



Man kan skelne mellem to typer refleksioner og kritik knyttet til opstilling om anvendelse af matematiske modeller:

- a) **Refleksioner og kritik, der er interne** i forhold til modelleringsprocessen. De knytter sig til de enkelte delprocesser i modelleringen. Det vil sige, at de *kan* foregå samtidig med udvikling af en model, og at de *i princippet* kan indarbejdes i modelleringsprocessen.
- b) **Refleksioner og kritik, der er eksterne** i forhold til modelleringsprocessen. De angår de kontekster, hvori modellen udvikles og anvendes som grundlag for teknologiske eller samfundsmæssige beslutninger. De forudsætter modellen og fokuserer på spørgsmål om hvilke interesser, der er eller kan være involveret i opstilling og anvendelse af modellen, hvilke virkninger og bivirkninger anvendelse af modellen kan have, samt hvordan den påvirker beslutningsprocesser, hvori dens resultater indgår. (Blomhøj & Kjeldsen, 2011)

27

Interne refleksioner og kritik



Fokus for **interne refleksioner og kritik** er de antagelser og valg der tages i de enkelte **delprocesser i modelleringen**.

Det kan fx være i formulering af problemet/problemfeltet, afgrænsning eller konstruktion af det system, der tages i betragtning, anvendelse af teori og data, valg af matematisering, valg og estimering af parametre, matematiske analyser herunder brug af digitale redskaber samt fortolkning og vurdering af modellens resultater.

Afhængigt af vidensområdet er forskellige former for refleksioner og kritik mulig og nødvendig. Her er det vigtigt at skelne mellem situationer, hvor

- hvor det er muligt at gennemføre **teoribaseret modellering og kontrol**, og
- hvor modelopbygningen i forskellig grad er baseret/må baseres på **empiriske modellering, der ikke er teoriunderbygget**, men bygget på **ad hoc antagelser**.

28

Eksterne refleksioner

I anvendelsessammenhænge angår **eksterne refleksioner og kritik** en models mulige og/eller faktiske **roller og funktioner i en undersøgelses- eller beslutningsproces** i en bestemt samfundsmæssig, teknologisk eller videnskabelig kontekst.

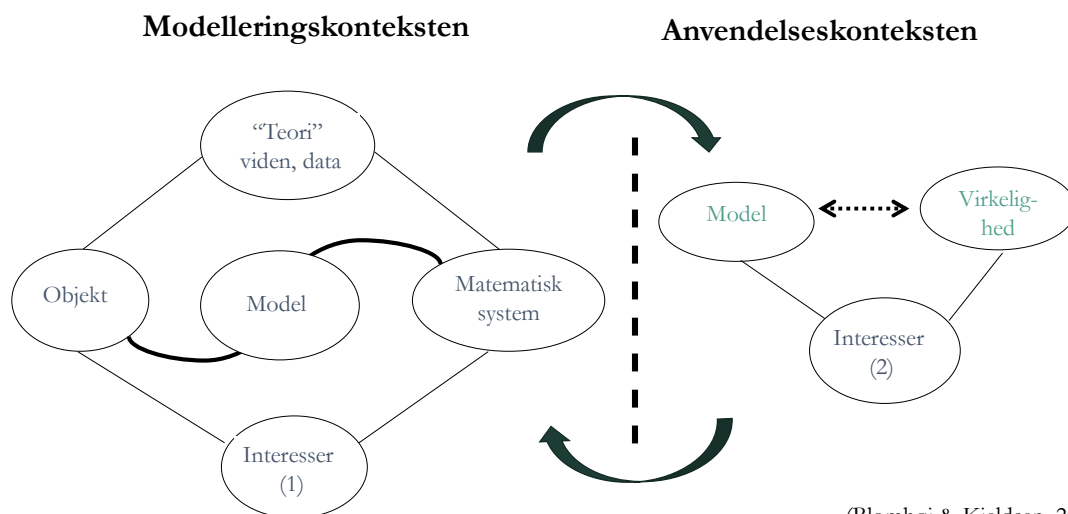
Fire eksempler på generelle problemstillinger, der kan være genstand for eksterne refleksioner og kritik er:

- (1) **Transformation af et oprindeligt problem** således, at det kan undersøges eller behandles ved hjælp af matematisk modellering
- (2) Modellen **rammesætter diskursen** om problemet og **de mulige løsninger**
- (3) De **handlinger og løsninger** der overvejes **begrænses** til dem, der kan evalueres i modellen
- (4) Den gruppe af mennesker, der kan deltage/deltager i diskussionen – **kritikbasen** – begrænses til dem, der har **indsigt i modellen og/eller dens rolle og funktion**.

(Blomhøj & Kjeldsen, 2011)

29

De strukturelle relationer ved anvendelse af en matematisk model



(Blomhøj & Kjeldsen, 2011)

30

Plan



- 13.30 Modeller og modellering i gymnasiet
Eksempel: Den salte syge - modellering af smittespredning
- 13.50 Analyse af eksemplet - hvordan kan det være eksemplarisk?
- 14.05 **Inspiration til modelleringsforløb**
- 14.10 Gruppearbejde om udvikling og diskussion af undervisningsforløb med udgangspunkt i egne ideer/erfaringer eller eksempler fra skemaet.
- 14.30 Pause undervejs med kaffe/te og kage/sødt (15 min.)
- 14.45 Fortsat gruppearbejde med planlægning af kort fremlæggelse
- 15.00 Runde med ideer til og analyse af modelleringsforløb. Ca. 5 min. til hver gruppe.
- 15.15 Spørgsmål til fælles drøftelse:
Hvilke krav skal forløbene opfylde for at kunne bruges i undervisningen?
Hvordan kan vi fremme integration af MM i undervisningen?
- 15.30 Slut

31


Kilder til modelleringsforløb med et kritisk potentiale

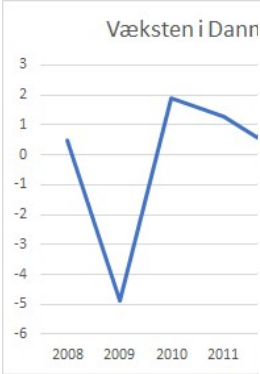


- Samfundsmæssige problemstillinger
- befolkningsudvikling og – tæthed, globalt, nationalt og lokalt
 - aldersfordeling og forventet levealder – globalt og nationalt
 - epidemier og pandemier og sygdomsforekomst i øvrigt
 - foreskrivende modeller i sundhedssektoren fx BMI og nakkefoldsscanning
 - økonomisk ulighed globalt og nationalt
 - resurseudnyttelse: energi, vand, jord (areal)
 - valgsystemer
 - matematik og krig
 - FN's verdensmål for bæredygtig udvikling

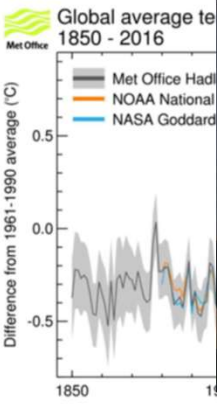
32

Samfundsmæssige kriser, hvor modellering spiller en hovedrolle






Væksten i Dann



Global average temperature 1850 - 2016



33

Matematiske modellers samfundsmæssige rolle















34

Inspiration til forløb om bæredygtig udvikling



FN'S 17 VERDENSMÅL FOR BÆREDYGTIG UDVIKLING

1 AFSKAF FATTIGDOM
2 STOP SULT
3 SUNDHED OG TRIVSEL
4 KVALITETS- UDDANNELSE
5 LIGESTILLING MELLER KØNNENE
6 RENT VAND OG SANITET
7 BÆREDYGTIG ENERGİ
8 ANSTJENDIGE JOBS OG ØKONOMISK VÆKST
9 INDUSTRI, INNOVATION OG INFRASTRUKTUR
10 MINDRE ULIGHED
11 BÆREDYGTIGE BYER OG LOKALSAMFUNN
12 ANSVARLIGT FORBRUG OG PRODUKTION
13 KLIMA- INDSATS
14 LIVET I HAVET
15 LIVET PÅ LAND
16 FRED, RETFERDIGHED OG STÆRKE INSTITUTIONER
17 PARTNERSKABER FOR HANDLING

VERDENSMÅL for bæredygtig udvikling

UNDERVISNING

BILDRUKNING, BIOLOGI, BIOTEKNOLOGI, DANSK, DESIGN, ENGLISK, FYSIK, HISTORIE, IDRÆT, INTERNATIONAL ØKONOMI, KEMI, MATEMATIK, MEDIETAG, HISTORIE, NATURGEØGRAFI, RETORIK, SAMFUNDSFAG, SPANSK, TEKNOLOGI, TVÆRFAGLIGT, FRANSK, TYSK, MATERIALESAMLING

- <https://www.verdensmaalene.dk/maal>
- <https://www.dst.dk/da/Statistik/temaer/SDG>
- <https://www.verdensmaalene.dk/undervisningsmateriale>

35

Kilder til modelleringsforløb med et kritisk potentiale

- Anvendelser i andre fag – mulighed for tværfagligt samarbejde
 - afkøling af kakao og lig
 - $10=44$ fartkampagnen
 - 100 meter løb
 - modeller for kondital
 - alkoholindtag og –forbrænding
 - medicindosering
 - skarvpopulationens udvikling
 - samspil med nat. fag og/eller samfundsfag om de nævnte samfundsmæssige problemstillinger
 - skyldig uden for rimelig tvivl
 - hvor mange mennesker deltog i demonstrationen?

36

Kilder til modelleringsforløb med et kritisk potentiale



- Privatøkonomi
 - lånefinansiering af fastejendom
 - store anskaffelser - fx af energiløsninger: varmepumpe, solcelleanlæg, ...
 - abonnementsaftaler – fx telefoni og streaming.
 - pengespil – hvad er sandsynligheden for gevinst?
- Elevernes (nære) omverden
 - hvor mange elever kan der gå på skole? Hvordan vil antallet af elever udvikle sig?
 - vejen til skole, valg af transportform, er det farligt at cykle til skole?
 - vandforbrug ved brusebad,
 - el-forbrug ved gaming – dit eget og på nationalt plan
 - hvordan skal alkoholindtaget til festen planlægges?
- Gamle eksamensopgaver inden for emnet differentiallyigninger – fx Skarv populationen

37

Plan



- 13.30 Modeller og modellering i gymnasiet
Eksempel: Den salte syge - modellering af smittespredning
- 13.50 Analyse af eksemplet - hvordan kan det være eksemplarisk?
- 14.05 Inspiration til modelleringsforløb
- 14.10 **Gruppearbejde om udvikling og diskussion af undervisningsforløb med udgangspunkt i egne ideer/erfaringer eller eksempler fra skemaet.**
- 14.30 Pause undervejs med kaffe/te og kage/sødt (15 min.)
- 14.45 Fortsat gruppearbejde med planlægning af kort fremlæggelse
- 15.00 Runde med ideer til og analyse af modelleringsforløb. Ca. 5 min. til hver gruppe.
- 15.15 Spørgsmål til fælles drøftelse:
Hvilke krav skal forløbene opfylde for at kunne bruges i undervisningen?
Hvordan kan vi fremme integration af MM i undervisningen?
- 15.30 Slut

38

Plan



- 13.30 Modeller og modellering i gymnasiet
Eksempel: Den salte syge - modellering af smittespredning
- 13.50 Analyse af eksemplet - hvordan kan det være eksemplarisk?
- 14.05 Inspiration til modelleringsforløb
- 14.10 Gruppearbejde om udvikling og diskussion af undervisningsforløb med udgangspunkt i egne ideer/erfaringer eller eksempler fra skemaet.
- 14.30 Pause undervejs med kaffe/te og kage/sødt (15 min.)
- 14.45 Fortsat gruppearbejde med planlægning af kort fremlæggelse
- 15.00 **Runde med ideer til og analyse af modelleringsforløb. Ca. 5 min. per gruppe**
- 15.15 Spørgsmål til fælles drøftelse:
Hvilke krav skal forløbene opfylde for at kunne bruges i undervisningen?
Hvordan kan vi fremme integration af MM i undervisningen?
- 15.30 Slut

39



Tak for jeres deltagelse!

40

Referencer



- Blomhøj, M. (2019). Towards Integration of Modelling in Secondary Mathematics Teaching. In G. Stillman & J.P. Brown (eds.) *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education* (pp. 37-52). Springer, Cham.
- Blomhøj, M. (2016). *Fagdidaktik i matematik*. Frydenlund.
- Blomhøj, M., & Elicer, R. (2021). Epidemiological models and the problem of coherence: from the critical justification to a practice of teaching mathematical modelling. *Quadrante*, 30(2), 79-100.
- Blomhøj, M. and T. Højgaard Jensen (2007). What's all the fuss about competences? Experiences with using a competence perspective on mathematics education to develop the teaching of mathematical modelling. In: W. Blum et al. (red.): *Modelling and applications in mathematics education*, pp. 45-56. The 14th ICMI-study 14. New York: Springer-Verlag.
- Blomhøj, M., & Kjeldsen, T. H. (2013). The Use of Theory in Teachers' Modelling Projects—Experiences from an In-Service Course. In Proceedings of CERME (Vol. 8).

41

41

Referencer



- Elicer, R., & Blomhøj, M. (2023). Mathematics in Action: On the Who, Where and How of the Constructions and Use of Mathematical Models in Society. In *Mathematical Competencies in the Digital Era* (pp. 219-235). Cham: Springer International Publishing. Dewey (1938). *Experience and education*. Kappa Delta Pi.
- Elicer, R. (2020). *On the teaching and learning of probability and statistics in the perspective of Critical Mathematics Education* [PhD-afhandling]. Roskilde Universitet. <http://thiele.ruc.dk/imfufatekster/pdf/513.pdf>
- Negt, O. (1975). *Sociologisk fantasi og eksemplarisk indlæring*. RUCs boghandel og forlag.
- Palm, T. (2009). Theory of authentic task situations. In L. Verschaffel, B. Greer, W. van Dooren, & S. Mukhopadhyay (Eds.), *Words and worlds: Modelling verbal descriptions of situations* (pp. 3–19). Sense.
- Wagenschein, M. (1956). Zum Begriff des exemplarischen Lehrens. *Zeitschrift Für Pädagogik*, 2, 129–156.

42

42

Udvikling fra ”model af” til ”model for”

1. *aktivitet* i sammenhæng med den konkrete opgave, hvor fortolkning og forståelse af det matematiske indhold og løsning af opgaven er baseret på en forståelse af den konkrete kontekst. **Situational**
2. *henvisningsaktivitet*, hvor modellen optræder som en *model af* den konkrete situation, der er etableret i undervisningen. **Referential**
3. *generel aktivitet*, hvor modellen med dens konkrete referencer optræder som *model for* en generel matematisk sammenhæng, og hvor aktiviteterne angår modellens generelle egenskaber og deres forbindelse til den matematiske teori. **General**
4. *formel matematisk aktivitet*, hvor fortolkning og forståelse af matematikken ikke længere kræver støtte fra situationer, der tjener som model for den matematiske sammenhæng. **Formal**

(Gravemeijer, 2007, 1999)

Autenticitet

Hjælpe spørgsmål

I hvilken grad passer de forskellige aspekter af forløbet til den virkelige situation?

- A. Begivenhed.** Handler det om noget, der faktisk sker/kan ske?
- B. Spørgsmål.** Er det noget, folk faktisk vil/skal løse?
- C. Information/data.**
 - C1. Eksistens.** Kan informationen/data findes?
 - C2. Realisme.** Er værdier realistiske?
 - C3. Specificitet.** Passer informationen til konteksten?
- D. Præsentation**
 - D1. Formater og repræsentationer.** Tekst, diagrammer, tabeller...
 - D2. Sprog.** Teknisk- eller skolesprog?
- E. Løsningsstrategier**
 - E1. Tilgængelighed.** Kan eleverne løse det ligesom i konteksten?
 - E2. Oplevet plausibilitet.** Hvordan ved I, at det kan løses på denne måde?
- F. Omstændigheder**
 - F1. Tilgængelighed af eksterne værktøjer
 - F2. Vejledning
 - F3. Konsultation og samarbejde
 - F4. Diskussionsmuligheder
 - F5. Tid
 - F6. Konsekvenser
- G. Løsningskrav**
- H. Formål i den figurative kontekst**

Eksemplaritet

Hjælpe spørgsmål

I hvilken grad kan casen i forløbet være eksemplarisk for...?

1. Elevernes egne oplevelser og interesser? (**Subjektiv**)
2. Den matematiske indhold og kompetencer? (**Instrumental**)
3. Samfunds underliggende overbevisninger og værdier? (**Kritisk**)

Skema til vurdering af eksemplaritet af MM-forløb i gymnasiet

Titel,	Fænomen	Modelfunktion	Modelleringsprocessen	Matematikindhold	Autenticitet	Referencer
Den salte syge	Smittespredning, restriktioner og vaccination ved bekæmpelse af epidemier.	Beskrivende, forklarende, og kontrollerende	Eleverne kan opstille en SI-model ud fra ”reglerne” for den salte syge. De kan estimere kontakteraten ud fra data, og validere model kvalitativ og ved hjælp af data.	Data-plot, regression, eksponentialfunktion, SI-differensligningsmodel, den logistiske differentialligning	Problemstillingen bliver autentisk via videoen fra SIS, der giver konteksten for eksperimentet med den salte syge.	Video fra SIS og teamet Epidemimatematik
Skarven	Skarvpopulationens vækst i Danmark efter fredningen i 1980.	Beskrivende og forudsigende, men ikke forklarende. Den alternativ model er forklarende.	Afkodning og kritik af forudsætningerne for og forudsigelse fra den foreslående model. Opstilling af alternativ model, der kan valideres kvalitativt og over for data.	Analyse af data, lineær regression, behandling af differentialligningen: $y'/y = b - a \cdot t$ og af den logistisk differentialligning: $y' = a \cdot y \cdot (K - y)$	Problemstilling, data, og model er autentisk. Modelkritik og opstilling af alternativ model kan opleves som autentisk.	<i>Vand & Miljø</i> , 10(2), 1993. Gamle eksamensopgave mat A.
Festen	Modellering af mængden af alkohol i en person ved indtag- og forbrænding af alkohol ifbm. en fest.	Beskrivende af målte eller foreliggende data. Forklarende ved i forhold til konstant forbrænding 8g/time, som rimeligt estimat for leverens omsætning af alkohol	Eleverne kan selv bestemme alkoholindtaget i modellen, og hvordan det er fordelt i tid. Forbrændingen antages at være konstant 8g/time. Eleverne kan opstille og analysere modellen i et regneark. Kompartiment repræsentation kan anvendes.	Lineær funktion, trinvis beskrivelse af lineære udvikling, stykvis lineær funktion. Opbygning af et regneark for en differentialligning med konstant rate.	Problemstilling er både objektiv og subjektiv autentisk (for elever, der indtager alkohol ved fester.	Blomhøj (2016) <i>Fagdidaktik i Matematik</i> . Frydenlund.

Titel,	Fænomen	Modelfunktion	Modelleringsprocessen	Matematikindhold	Autenticitet	Referencer
Medicinering	Mange lægemidler skal doseres tidligt for have den tilsligtede terapeutiske effekt. For nogle lægemidler aftager koncentrationen – og dermed effekt- eksponentielt. Det skal der tages højde for i en medicineringsplan.	Beskrivende af evt. data for udviklingen af koncentration af et lægemiddel i blodet hos enkelte patienter. Modellen kan anvendes foreskrivende ved at afprøve forskellige medicineringsplaner, der opfylder givne koncentrationskrav.	Eleverne kan opstille en model, hvor koncentrationen i blodet aftager eksponentielt, og hvor der kan tilføres medicin på bestemte tidspunkter ved piler, injektion eller med et drop som under en operation. Modellen kan implementeres i et regneark – med samme grundstruktur som ved modellen for ”Festen”. Kompartmentrepræsentation kan anvendes.	Trinvis beskrivelse af eksponentiel udvikling – nedbrydning/udskillelse af medicin. Opbygning af regneark for en differensligningsmodel for en sådan udvikling med mulighed tilførsel af medicin til bestemte tider. Eleverne kan undersøge forskellige medicineringsplaner i modellen, og selv bestemme kriterier for valg af plan.	Problemstillingen er autentisk, men typisk arbejdes med konstruerede data.	Blomhøj, M., & Kjeldsen, T. H. (2006). Teaching mathematical modelling through project work: Experiences from an in-service course for upper secondary teachers. <i>ZDM</i> , 38(2), 163-177.
Brusebadet	Hvor meget vand bruger du ved dit morgenbrusebad med og uden hårvask?	Beskrivende model, der kan valideres empirisk ved måling af vandflow.	Eleverne kan opstille en model ud fra deres egne erfaringer og målinger. De kan gøre antagelser om konstant vandflow, og forbrug af koldt/lunkent vand inden badet begynder.	Trinvis beskrivelse af en udvikling med konstant rate, lineær funktion, og stykvis lineær funktion. Eleverne kan få erfaringer med forskellen og sammenhængen mellem en dynamisk model, hvor der fx kan slukkes for vandet under hårvask og en stykvis lineær funktionsmodel.	Problemstilling kan opleves som autentisk, selvom modelleringen og anvendelse af modellen næppe er relevant udover undervisningskonteksten.	Blomhøj (2016) <i>Fagdidaktik i Matematik</i> . Frydenlund.

Titel,	Fænomen	Modelfunktion	Modelleringsprocessen	Matematikindhold	Autenticitet	Referencer
100-meter løbet	Under et 100m løb varierer farten mellem 0 m/sek. og en maximal fart. Hvordan kan farten modelleres så det passer med en gennemsnitsfart?	Beskrivende i forhold til en faktisk løbet 100 m med en målt gennemsnitsfart. Beskrivelsen kan være mere eller mindre realistisk, og given inspiration til ændret strategi ved nyt løb.	Eleverne kan matematisere den virkelige situation gennem forskellige idealisering af hvordan farten ændres, og når frem til en realistisk model, hvor de for hvert sekund angiver en fart, de kan have løbet med så det passer med deres målte gennemsnitsfart. De kan kritisere/validere de forskellige modeller over for deres oplevelser med løbet. Evt. kan modellen også valideres ud fra videobaseret måling af farten.	Eleverne kan allerede fra 1. g arbejde med integration som arealberegning under v-t grafer fra 0 til den målte tid, hvor arealet jo skal passe med de 100 m. Ved hjælp af fx GeoGebra kan de bestemme arealet under realistiske fartgrafer, og de kan selv bestemme farten for hvert sekund under løbet. Det giver grundlag for forståelse af integralregningens hovedsætning.	Problemstillingen er autentisk for elever, der faktisk har løbet 100 meter løbet og fået målt deres tid. Problemstilling er også autentisk inden for elite atletik.	Blomhøj, M. (2019). Towards Integration of Modelling in Secondary Mathematics Teaching. In G. Stillman & J.P. Brown (eds.) <i>Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education</i> (pp. 37-52). Springer, Cham.
BMI	Model der bruges til at bestemme kriterier for moderat og svær over- og undervægt.	Foreskrivende	Analyse af eksisterende model, afkodning af modellen og dens grundlæggende forudsætninger	Brug og forståelse af en formel, funktion af to variable og repræsentationer heraf, statistisk analyse af sygdomsforekomst blandt under- og overvægtige	Modellen og dens anvendelse i klinisk praksis som kriterie for behandlingstilbud er autentisk	BMI-modellen

Titel,	Fænomen	Modelfunktion	Modelleringsprocessen	Matematikindhold	Autenticitet	Referencer
Vindmøllen	En vindmølles effekt og dennes afhængighed af vindhastigheden.	Beskrivende (empirisk) og forklarende (teoretisk) hvad angår afhængighed af vindhastighed.	Model for en vindmølles effekt og dens afhængighed for vindhastigheden kan opstilles af eleverne i samspil med fysik. Modellens resultater for den teoretisk effekt kan sammenholdes med eksisterende data.	Algebra, anvendelse af fysiske love (formler) og regning med enheder.	Problemstillingen er autentisk. Det er vigtigt at kunne optimere vindmøllers karakteristik og placering i forhold vindforhold.	Der findes mange kilder, fx https://videnombvind.dk/wiki/effektaet-hedsfunktionen/
Vindmølleparken	Hvor meget areal optager en landbaseret vindmøllepark?	Modellen for det område en mølle optager er lovbestemt og foreskrivende ved planlægning af vindmølleparker. Der kan opstilles beskrivende modeller for det faktiske arealforbrug ved konkret placering i vindmølleparker.	Modelleringsprocessen kan gennemføres med udgangspunkt i lokale forhold og evt. GIS-data for placering af vindmøller.	Algebra, anvendelser af formler, geometri og arealberegning ved overlappede områder. Formlen: $A = \pi(4h)^2 = 16 \pi h^2$, hvor h er totalhøjden af en vindmølle, angiver arealet af det område vindmøllen optager – hvor der ikke må være bebyggelse.	Problemstillingen og den konkrete brug af en matematisk model er autentisk. Et eksempel herpå er beregning af arealet som vindmøllerne på Lolland optager.	Larsen & Christiansen (2021). <i>Vindmøller på Lolland</i> . Projekt i Differentialgeometri og Parametrisk Design, efteråret 2021. DTU

Titel,	Fænomen	Modelfunktion	Modelleringsprocessen	Matematikindhold	Autenticitet	Referencer
Retssagen	Skyldig uden for rimelig tvivl - hvor sandsynligt er det, at en mistænkte person er skyldig?	Foreskrivende, da det giver information der kan føre til, at en mistænkte person, erklæres som skyldig.	Eleverne kan reflektere over hvor problematisk og fejlagtig det kan være, at modeller sandsynlighed for, at en uskyldig mistænkte person passer på foreliggende beskrivelser og data for en gerningsperson.	Sandsynlighed, multiplikationsprincippet, uafhængighed, betinget sandsynlighed. Matematiske ræsonnement kompetence ift. matematiske begrundede argumenter.	Virkelig juridisk case fra Californien. I Danmark føres også retssager med jury, som kan overbevises af matematiske argumenter baseret på sandsynlighed.	Rosenthal, J. S. (2015). Probability, justice, and the risk of wrongful conviction. <i>The Mathematics Enthusiast</i> , 12(1-3), 11–18.
Demonstrationen	Hvor mange mennesker deltog i demonstrationen?	Beskrivende ved at give tal for, hvor stor tilslutning der har været til en given demonstration? Sådanne tal kan bruges politisk.	Eleverne kan bruge drone-bil- leder som data og matematikere flere antagelser ift. konteksten. Antal pr. kvadratmeter kan estimeres ved billedanalyse og ved at udtage stikprøve i stede for at tale i hele billedet.	Stikprøve, konfidensintervaller.	Problemstillingen er oplagt autentisk, og der refereres ofte til tal for opbakning til protester og demonstrationer nationalt og internationalt. Typisk angives ikke fx politiet hvordan der er estimeret eller hvad usikkerheden er.	Elicer, R. (2021). A crowd size estimation task in the context of protest in Chile. I <i>Proceedings of NORMA20</i> .