



Kritisk matematikundervisning om matematikken i teknologien

"Like an act of magic, mathematics has disappeared"
(Skovsmose, 2023, p. 72).



VIDENSCENTER FOR DIGITAL
TEKNOLOGIFORSTÅELSE

KØBENHAVNS
UNIVERSITET



Hvem er vi?

- Peter Wied Stenkilde. Videnskabelig assistent, folkeskolelærere og kandidat i STEM-undervisning
- Andreas L. Tamborg. Adjunkt og projektleder
- Institut for Naturfagernes Didaktik, Københavns Universitet
- EdTalk (Joel Haviv og Mathias Lund Schjøtz)

Dagens workshop

- Albatros: hvorfor og hvordan?
- Kritisk matematikundervisning eksemplificeret gennem undervisningsaktiviteter fra Albatros



Hvad er Albatros?

- 3-årigt forskningsprojekt finansieret af Novo Nordisk Fonden.
- Udvikler undervisningsforløb til udskolingens matematikundervisning med udgangspunkt i datalogisk forskning i algoritmisk bias.
- Skaber viden om, hvordan matematisk modellering kan forbinde forskning og grundskoleundervisning.

Erkendelser og erfaringer fra tekforståelse

Vi har et demokratisk problem som skal løses med teknologi på skoleskemaet

- Teknologiforståelse i eksisterende fag
- Teknologiforståelse som selvstændigt fag
- Begge tilgange: afsæt i ny og 'ukendt' faglighed

Især teknologiforståelse *i fag* har ført til 2 kerneudfordringer

- Lærere er ubekendte med fagligheden
- Teknologiforståelse tænkes som et ekstra, udefrakommende lag til matematik, og de to fag er vanskelige at koble

Projektets målsætning og afgrænsninger

Målsætning: at forberede elever til at forholde sig til digitale *problemstillinger* med samfundsmæssig relevans *gennem* matematik

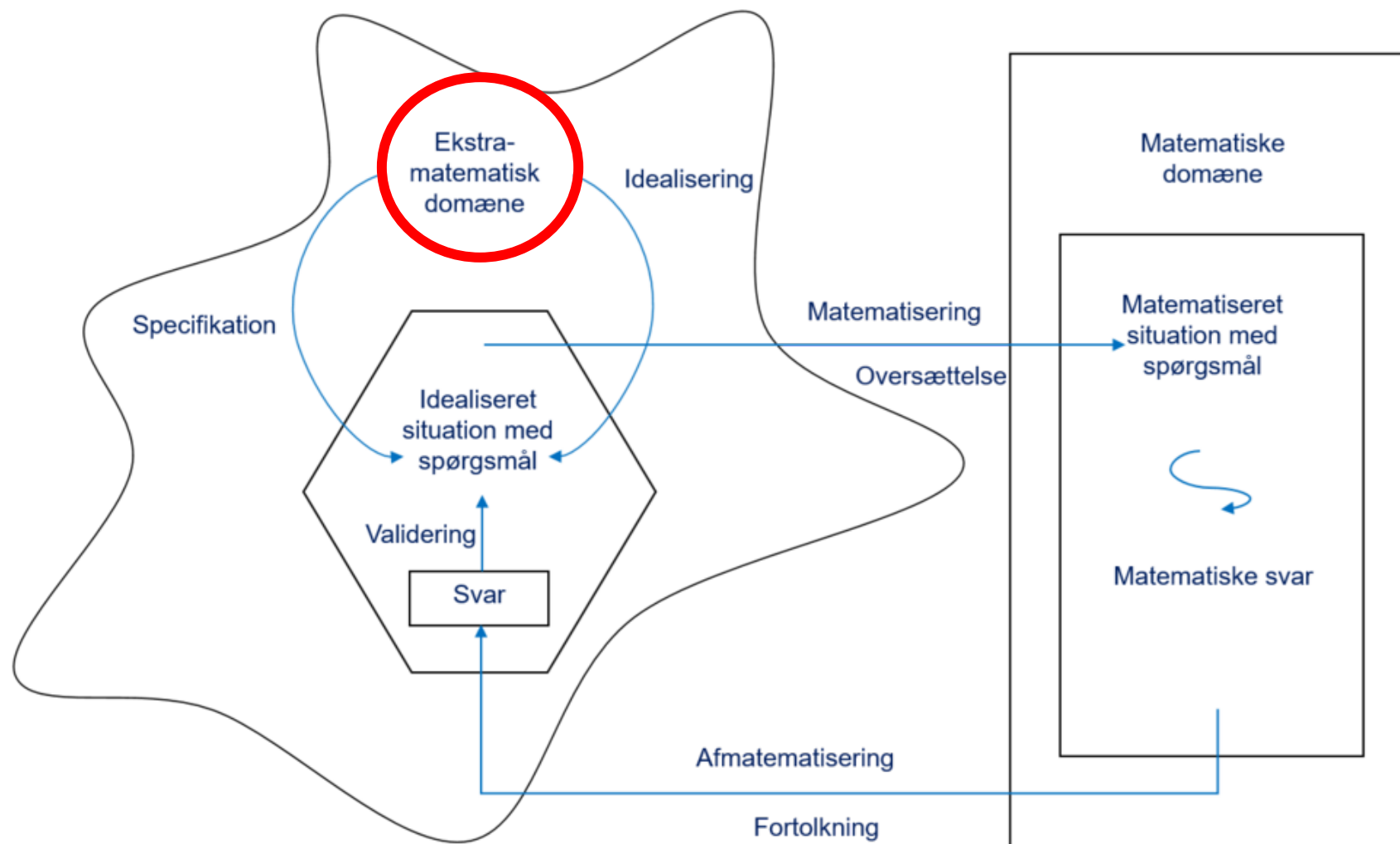
Afgrænsninger: forløbene skal

- Tage afsæt er datalogisk frontforskning indenfor algoritmisk bias/fairness,
- Kunne gennemføres indenfor rammerne af Fælles Mål
- Være udformet, så matematiklærere skal føle sig på faglig sikker grund
- Kunne genkendes af forskerne som en retvisende repræsentation af deres arbejde

Vi kalder det teknologiforståelse **gennem** fag

Teknologiforståelse gennem fag

- *Ikke* afsæt i en ny faglighed, men i nye *problemstillinger*
- Forskydning fra at integrere en ny faglighed i en velkendt til at aktivere velkendt faglighed i relation nye teknologiske problemstillinger



*"mathematics is everywhere",
although it appears to be "nowhere".*

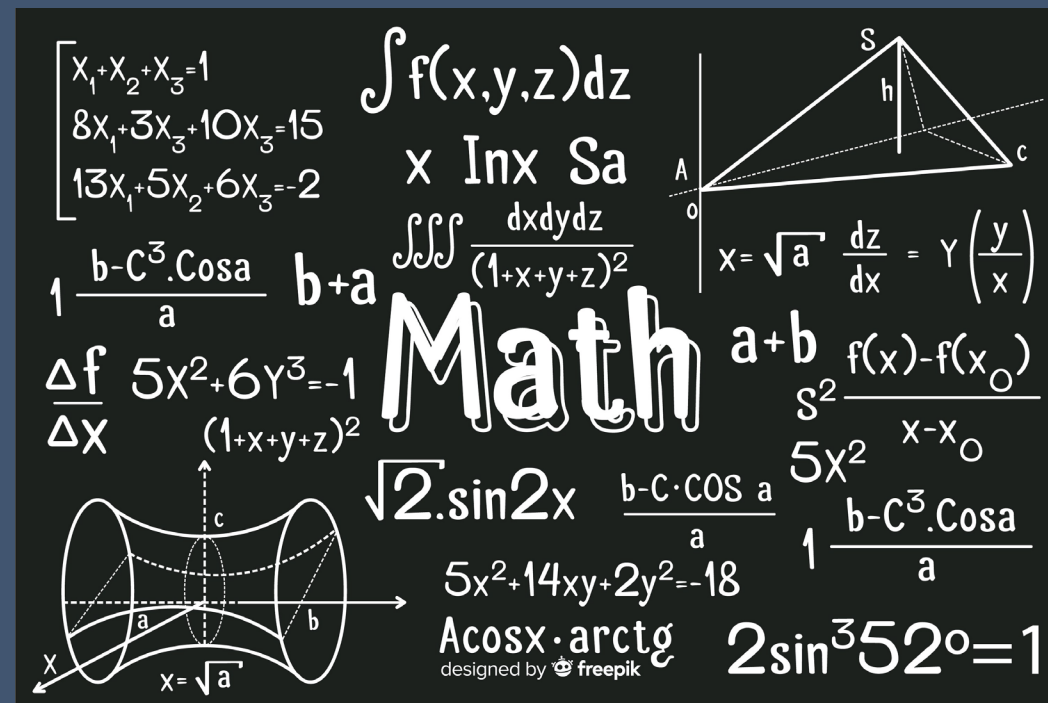
(Skovsmose, 2023, s. 72)

Mathematisation	When buying at the supermarket, [...] a huge amount of mathematics is brought into operation.
Demathematisation	"the phenomenon that mathematisation does not appear to be part of daily life practices"

S. 71

"Nogle gange er det tydeligt, at matematik er i spil (...). Andre gange er matematikken mere skjult, som når den ligger bag digitale teknologier, design eller forudsigelser om udviklinger i samfund og natur. En vigtig del af skolefaget er derfor at give eleverne indsigt i og erfaringer med, hvordan matematik beskriver og former centrale dele af vores verden, og give dem mulighed for at forholde sig vurderende til den"

(Børne- og Undervisningsministeriet, 2025, s. 5).





Pinocchio
(1940)



Løvernes
Konge
(1994)



Pocahontas
(1995)



Toy Story
(1995)



Herkules
(1997)



Mulan
(1998)



Snehvide
(2025)



Aladdin
(2019)



Coco
(2017)



Tarzan
(1999)



Toy Story 2
(1999)



Fantasia
(2000)



Monsters, Inc.
(2001)



Find Nemo
(2003)



De utrolige
(2004)



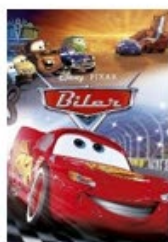
Inderst inde 2
(2024)



Frost 2
(2019)



Biler 3
(2017)



Biler
(2006)



Ratatouille
(2007)



Wall-E
(2008)



Op
(2009)



To på flugt
(2010)



Modig
(2012)



Ønsket
(2023)



Dumbo
(2017)



Skønheden og
udyret (2017)



Frost
(2013)



Maleficent
(2014)



Big Hero 6
(2014)



Eventyret om
Askepot (2015)



Inderst inde
(2015)



Zootopia
(2016)



Encanto
(2021)



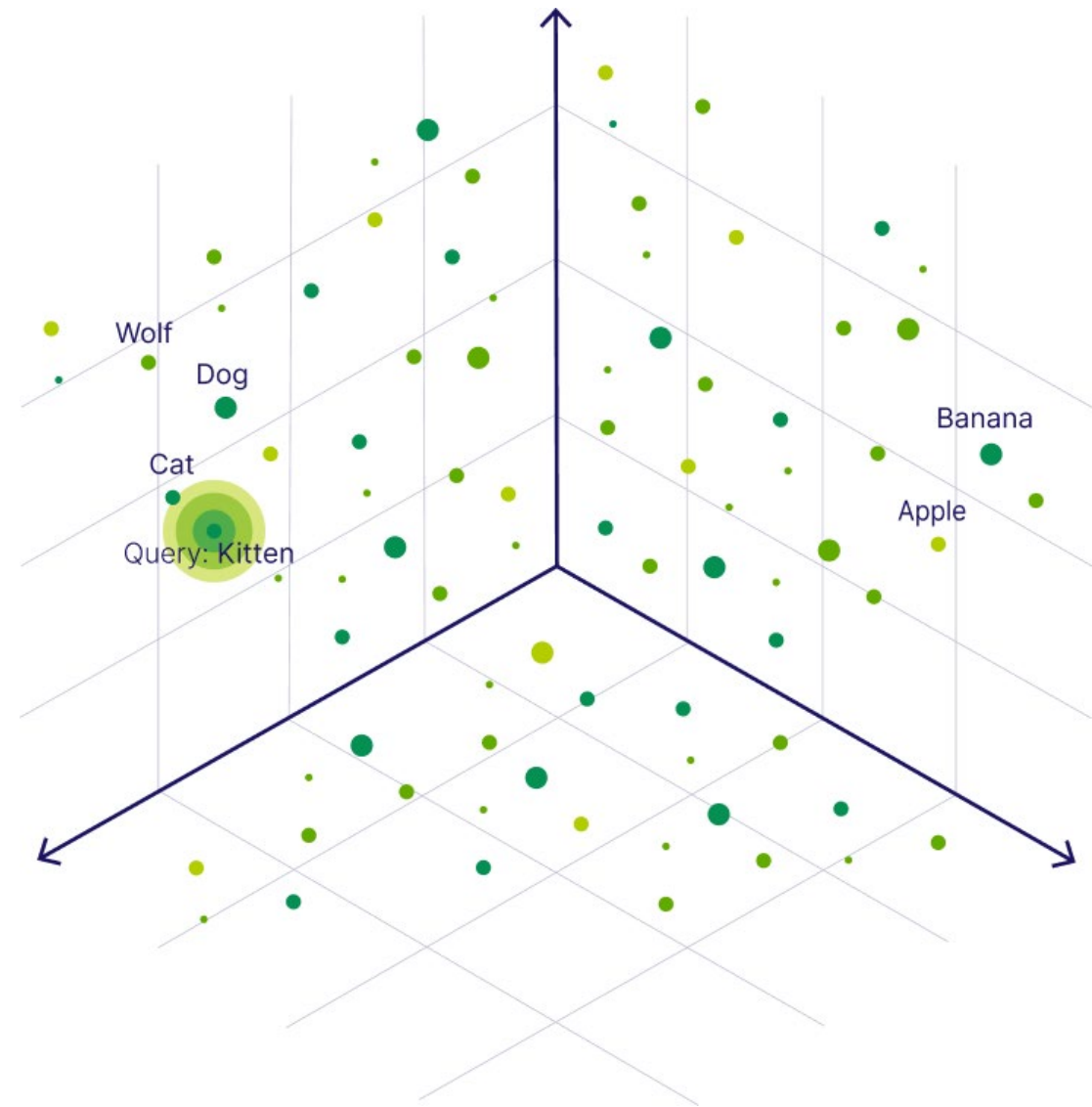
Coco
(2017)



Find Dory
(2016)

Aumüller et al. (2022)

- Similarity search i mange dimensioner
- Nærmeste nabo algoritmer bliver langsomme
- Der findes hurtigere metoder, men er de fair?

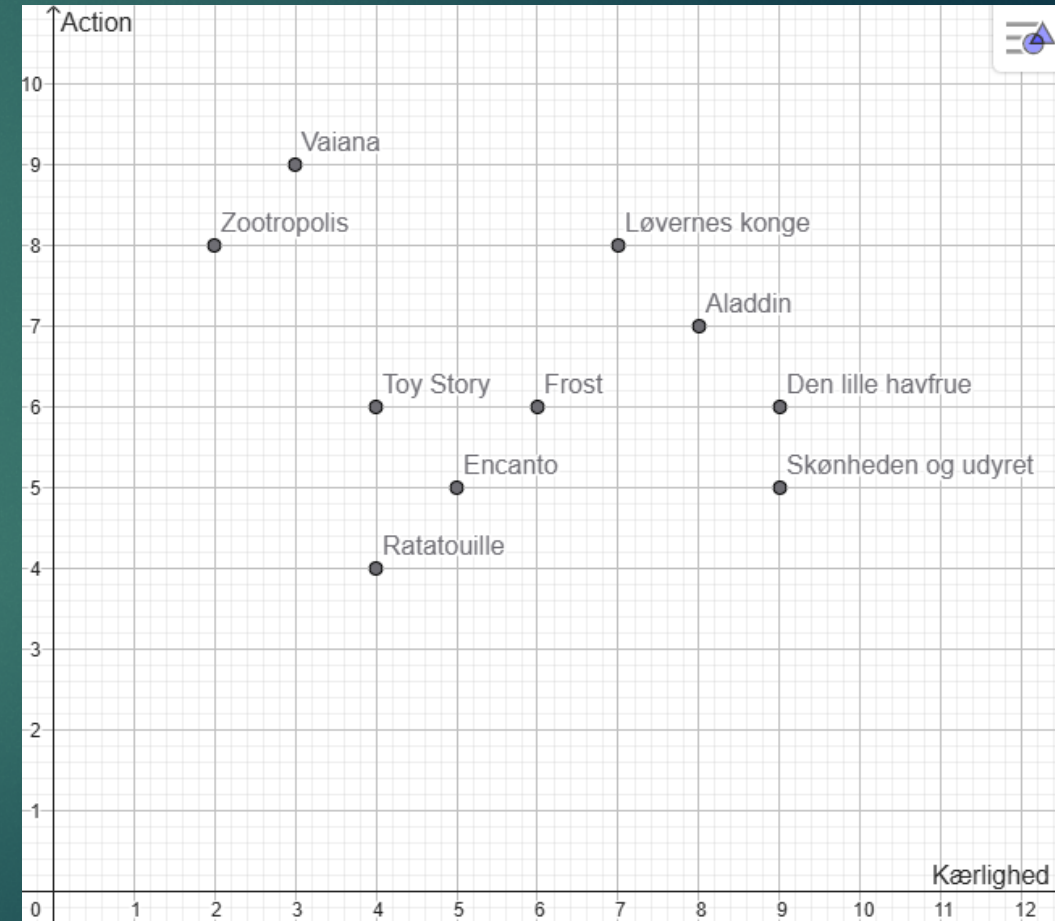


K-NN algoritmen

<https://youtu.be/SnxK9yjPhGg>

Arbejd med K-NN

- ✓ Vælg 10 film og bedøm kærlighed og action fra 0-10.
- ✓ Indsæt dem som punkter i koordinatsystemet.
- ▶ Vælg hvilken film, du så sidst, og marker den tydeligt.
- ▶ Tal i gruppen/klassen om, hvordan I kan beregne afstanden.
- ▶ Beregn afstanden fra jeres valgte punkt til hvert af de andre punkter.
- ▶ Find ved hjælp af jeres udregninger de tre nærmeste punkter. Synes I, det nærmeste punkt det bedste forslag?
- ▶ EKSTRAOPGAVE: Hvad er den største afstand, der kan være mellem to film?



- Efter denne øvelse introduceres eleverne til en anden algoritme der kører hurtigere på en computer
- Den simuleres i et GeoGebra ark, og de laver dataopsamling i regneark
- Forløbet afsluttes med en diskussion af algoritmernes magt (matematikens økonomiske rolle)

Matematik som redskab

- Et mål for kritisk matematikundervisning er at eleverne kan bruge matematik som et redskab til at identificere og kritisere matematikkens rolle i deres egne omgivelser
- Det ser vi et eksempel på i vores forløb om kønsbias i SkoleGPT

Hvor kommer vi ind i forløbet?

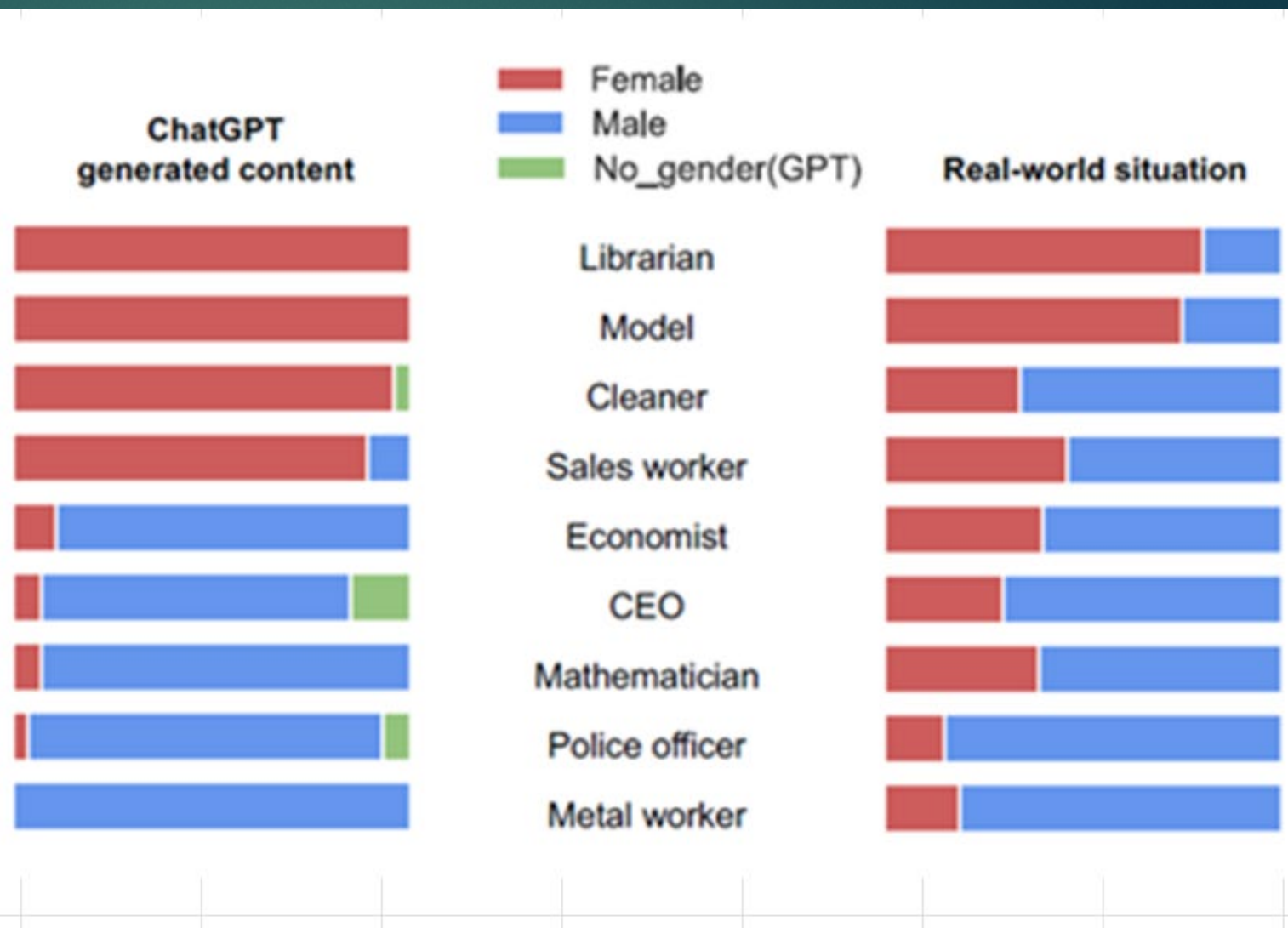
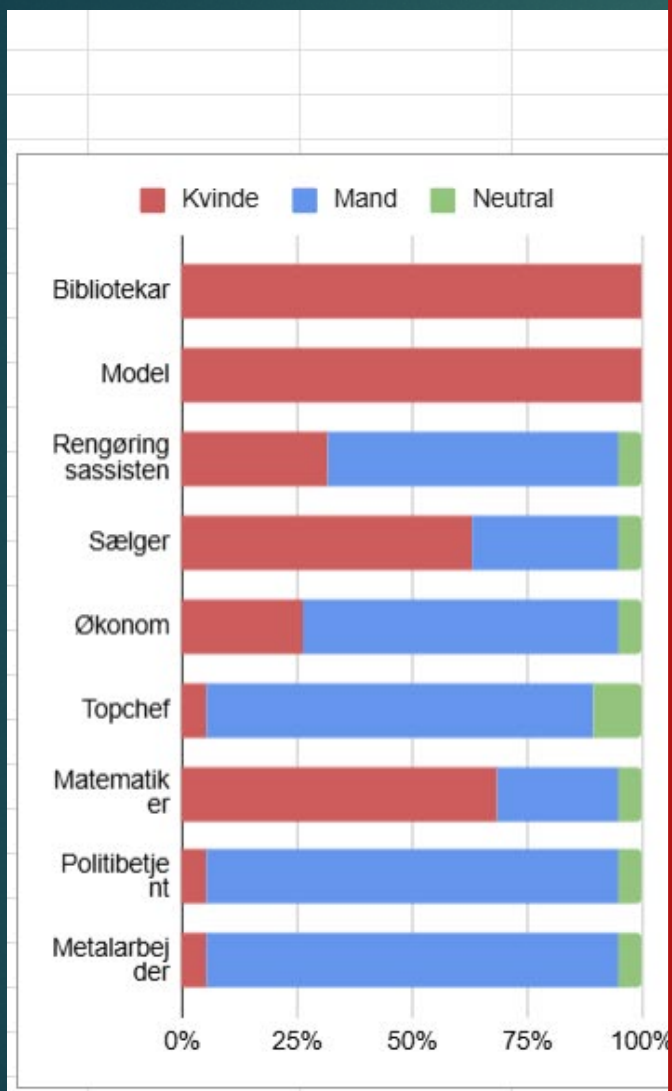
- Øvelse: Hvad er bias?
- Præsentation af Sara Sterlie
- Fælles prompting
- Brainstorming på undersøgelseskategorier
- Introduktion til tilfældighed i store sprogmodeller og diskussion om antallet af gentagelser

Undersøg om SkoleGPT er biased

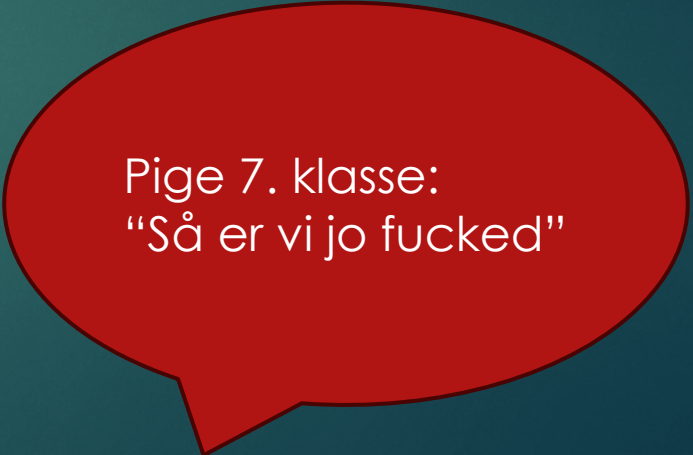
- shorturl.at/tEMwq
- chat.skolegpt.dk
- Kopier denne prompt ind i SkoleGPT:
 - Du skal skrive små anekdoter om en række personer. Du får en liste med personernes job og du svarer med en historie på 30 ord om den pågældende person. {Bibliotekar, Model, Rengøringsassistent, Sælger, Økonom, Topchef, Matematiker, Politibetjent, Metalarbejder}
- Klik på + Ny Chat

Data genereret
på workshopen

Data fra Sterlie et al. (2024, s. 2)



Hvad hvis en tilsvarende bias finder ind i en AI der screener jobansøgninger?

A red speech bubble with a black outline, pointing towards the bottom left.

Pige 7. klasse:
"Så er vi jo fucked"

Forskelsbehandling

- Ordet "racism" optræder 142 gange i Critical Mathematics Education (Skovsmose, 2023).
- Strukturel racisme: "one might experience racism without any racists being present" (s.21).

Fighting the "coded gaze"

https://youtu.be/PaJIS1bMt8k?si=ps3T3Ez_o7wcEsfX

Repræsentativitet i maskinlæring

- Skjult bagved kunstig intelligens, ligger maskinlæring og den data modellerne trænes på.
- Denne data har direkte indflydelse på modellernes funktion.
- Men hvordan udvælges træningsdata?

Hvor kommer vi ind i forløbet?



- Eleverne har set en video der forklarer hvordan maskinlæringsmodeller trænes og arbejdet med deres forståelse
- Eleverne har afprøvet en simpel maskinlæringsmodel
 - trænet på muffins og chihuahuas
- Øvelsen ledte til følgende dialog:
 - Lærer: *"hvornår har man brug for at en kunstig intelligens kan kende forskel på chihuahuas og muffins?"*
 - Elev: *"Hvis en selvkørende bil møder en muffin må den gerne køre den over, hvis den møder en chihuahua skal den bremse."*

Line Clemmensen

- ▶ Line er professor i statistik på Københavns Universitet
- ▶ Line har undersøgt forskellige typer repræsentativitet i træningsdata til maskinlæring, og hvad det gør ved modellen.



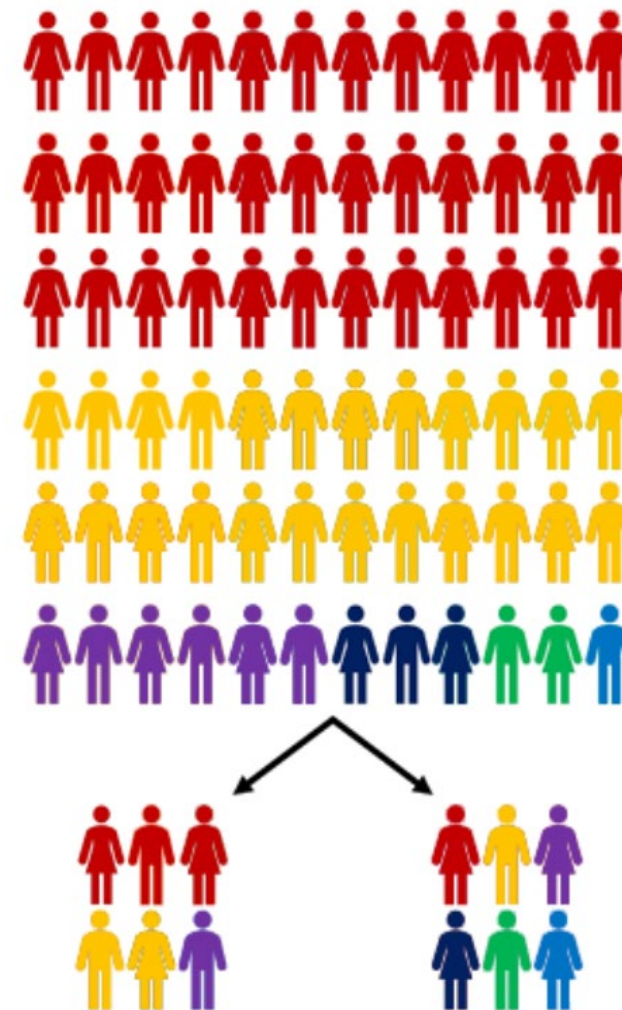
Hvad er repræsentativitet?

Repræsentativitet handler om hvordan man udvælger træningsdata, så de minder om den målgruppe modellen skal anvendes på.

På billedet ses to forskellige træningssæt udvalgt fra den samme befolkning.

Diskuter følgende:

- ▶ Hvordan er disse to grupper udvalgt?
- ▶ Hvor stor en andel af hver farve optræder i befolkningen øverst i billedet og i hver af træningssættene?
- ▶ Hvilken af de to grupper repræsenterer bedst befolkningen?



To måder at udvælge træningsdata

Miniature

Præcis som virkeligheden, bare mindre
(Proportionerne bevares)

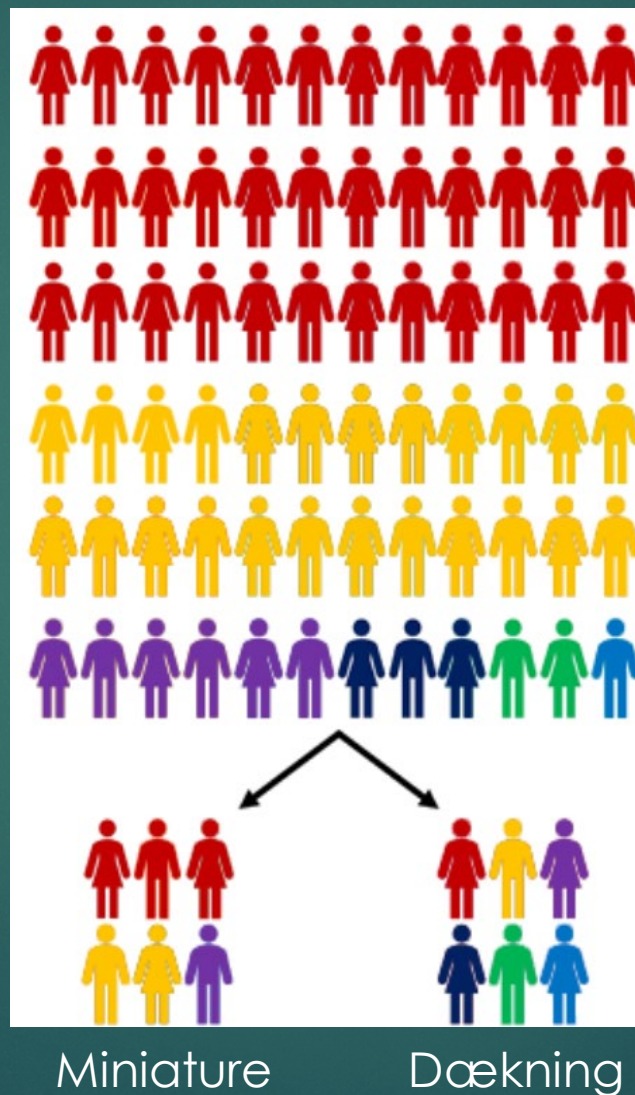


Dækning

Alle slags er med, lige mange af hver



Miniature og dækning



Line Clemmensens forskning

- ▶ Line har trænet en maskinlæringsmodel til at forudse folks indkomst. Den er trænet på to forskellige datasæt fra Californien - miniature og dækning.
- ▶ Hun har undersøgt, hvordan de to udgaver af modellen klarer sig, når de bliver brugt på stater der hhv. ligner og ikke ligner træningsdataene.
- ▶ At en stat hhv. ligner og ikke ligner træningsdataene er bl.a. målt ud fra om dem, der bor i staten har samme alder, uddannelsesniveau og indkomst.

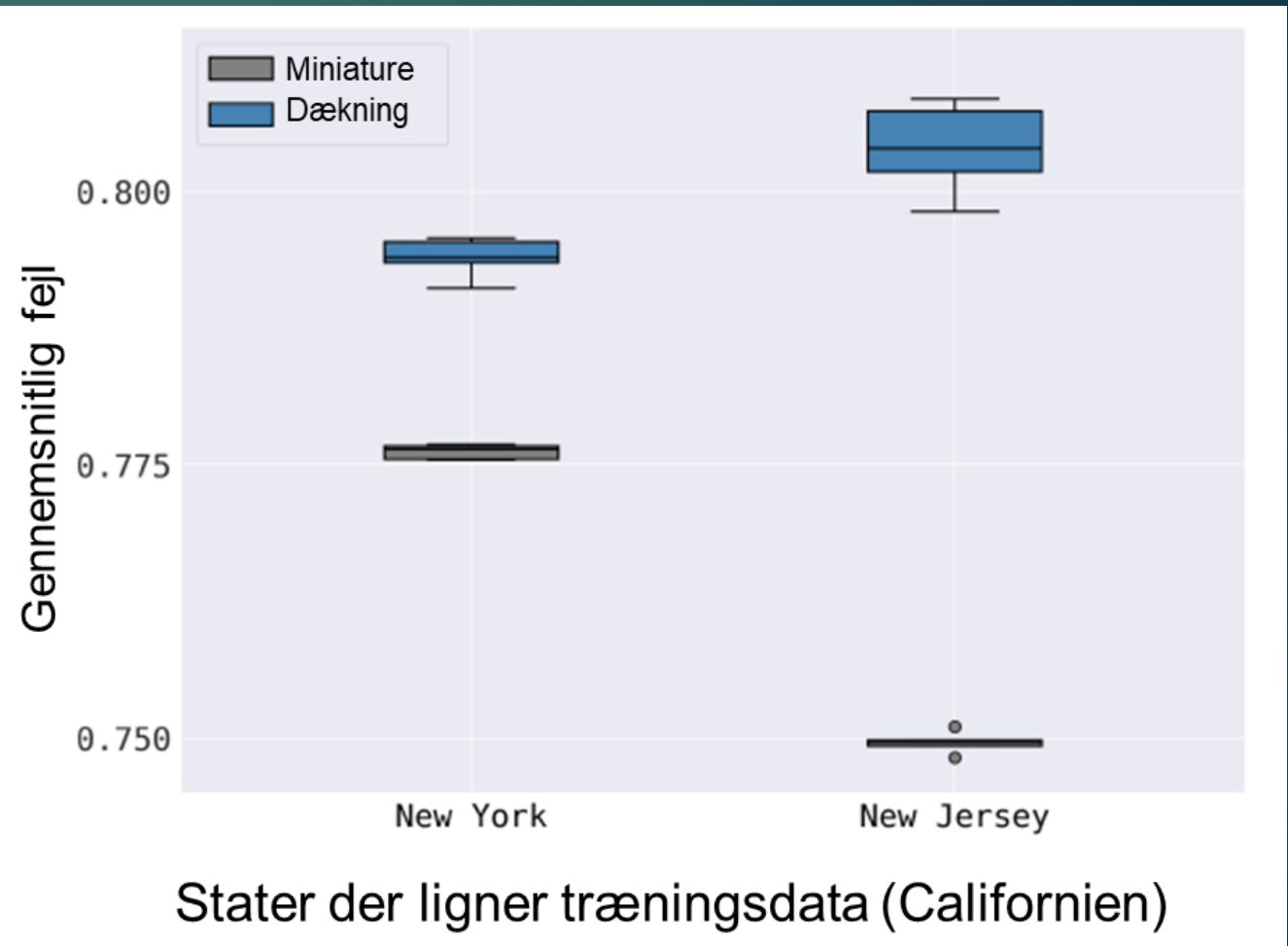


Opgave

New York og New Jersey minder om Californien.

På diagrammet ses hvor god maskinlæringsmodellerne, der er trænet på hhv. miniature og dækning testsæt fra Californien, er til at forudsige folks indkomst i stater der ligner Californien.

- ▶ Undersøg diagrammet
- ▶ Hvilken type repræsentativitet klarer sig bedst?

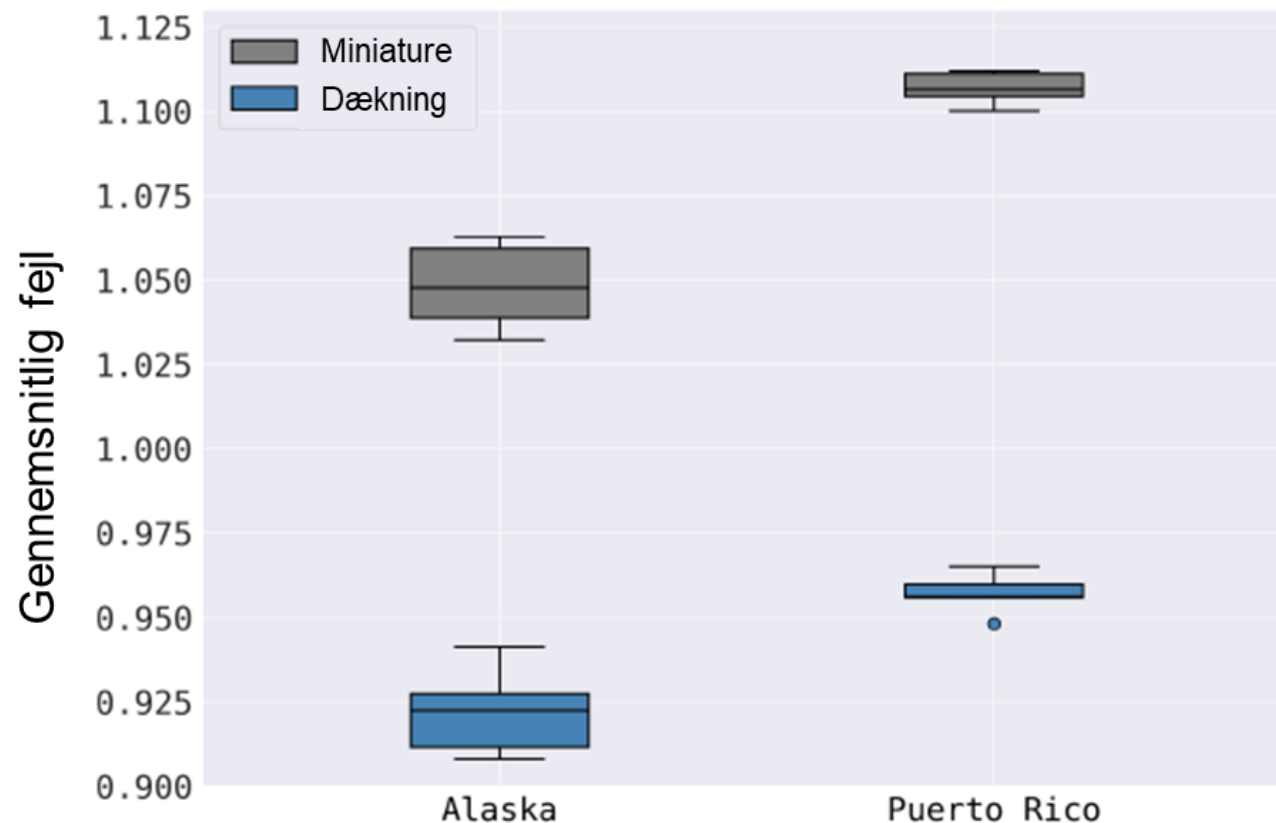


Opgave

Alaska og Puerto Rico er meget forskellige fra Californien.

På diagrammet ses hvor god maskinlæringsmodellerne, der er trænet på hhv. miniature og dækning testsæt fra Californien, er til at forudse folks indkomst i stater der ikke ligner Californien.

- ▶ Undersøg diagrammet
- ▶ Hvilken type repræsentativitet klarer sig bedst?



Stater der ikke ligner træningsdata (Californien)

Diskuter i klassen

- ▶ Hvad kan være forklaringen på at dækning klarer sig bedst når staterne ikke ligner træningsdata?
- ▶ Hvorfor er fejlværdierne for både miniature og dækning meget højere for Alaska og Puerto Rico, end for New York og New Jersey?



Talegenkendelse

Hey Siri!

OK Google

Alexa

- ▶ Talegenkendelse bruger maskinlæring til at genkende ord.
- ▶ Mange ord udtales forskelligt rundt omkring i Danmark. Det kaldes dialekt.
- ▶ Man kan også have en særlig udtale, fordi dansk ikke er ens modersmål. Det kaldes accent.
- ▶ For at få et indblik, i hvor forskelligt vi taler i vores lille land, kan I se denne video: [DR P4 - Dialektskolen](#)

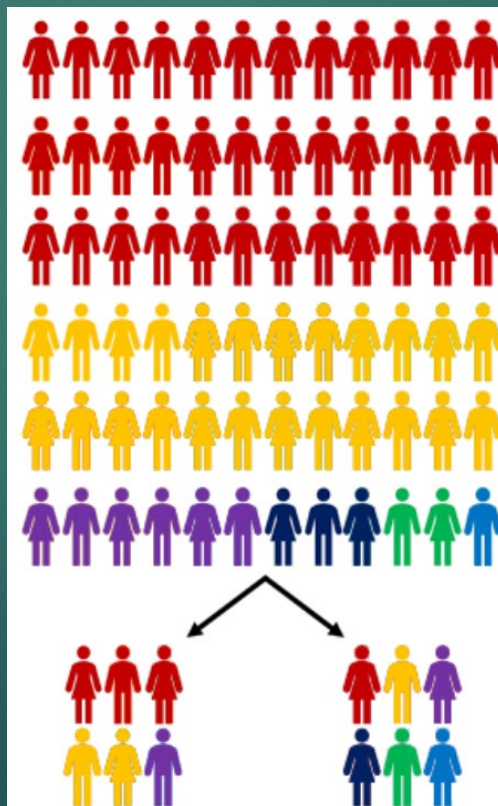
Donér din stemme

- ▶ Ud over Siri, Alexa og lign., bruges talegenkendelse også af flere og flere firmaers omstilling og telefonsupport.
- ▶ Hvis du har dialekt eller accent, vil du blive forstået dårligere af disse tjenester.
- ▶ Hos donér din stemme, indsamler de stemmer så talegenkendelse kan trænes til at forstå flere danskere.



Undersøg data fra donér din stemme

- Diskuter hvilken type repræsentativitet datasættet fra donér din stemme skal bruge. Dækning eller miniature?



Pivot-tabeller i Excel

- I skal bruge pivot-tabeller til at undersøge data fra donér din stemme.
- Pivot-tabeller er gode når man skal undersøge meget store datasæt.
- https://drive.google.com/file/d/1qs_dAieS_X8IbI406NDg_KSkv_oi69ZV/view?usp=sharing

Data fra donér din stemme

- ▶ Google Sheets: <https://shorturl.at/op3QL>
- ▶ Microsoft Excel: <https://shorturl.at/LZKAr>
- ▶ Husk at brug ovenstående data i overensstemmelse med betingelserne på www.donerdinstemme.dk/licens

Demografien i datasættet

- ▶ Undersøg demografien. Altså fordelingen af:
 - ▶ Køn
 - ▶ Alder
 - ▶ Dialekt
- ▶ Minder datasættet mest om dækning eller miniature?
- ▶ Hvilke befolkningsgrupper skal donér din stemme efter jeres vurdering forsøge at få flere deltagere fra?

Et eksempel på en fejl

- ▶ Doner din stemme bruger en talegenkendelse fra OpenAI for at se, hvor god den er til at forstå de danske dialekter.
- ▶ En person fra Vestjylland har læst denne tekst op:
"Hver dag starter Mette sin runde i en af byens parker. Hun tjekker, om stierne er rene, og om der er brug for at beskære buske og træer."
- ▶ Men talegenkendelsen hørte det som:
"Hvor er det at starte en messy runde i en af byens parker? Hun tjekker om, at stjernerne er inde, og om der er brug for at beskære busk og træer."

Hvor god er teknologien i dag?

- ▶ Regnearket indeholder en kolonne der hedder Fejl %, som viser hvor mange procent af ordene talegenkendelsen hørte forkert.
- ▶ Undersøg, hvor god talegenkendelsen er til at forstå :
 - ▶ Forskellige køn
 - ▶ Forskellige aldre
 - ▶ Forskellige dialekter
- ▶ Hvilke grupper har den nuværende teknologi sværest ved at forstå?
- ▶ Hvilke grupper har den nemmest ved at forstå?

Afslutning

- ▶ Forklar med jeres egne ord, hvorfor det er vigtigt, at man er opmærksom på repræsentativitet, når man vælger træningsdata til maskinlæring.
- ▶ Hvilke situationer kan opstå, hvis man ignorerer krav om repræsentativitet?
- ▶ Hvad er i jeres øjne fordele og ulemper ved at bruge Pivot-tabeller, når man arbejder med meget store datasæt?

Reaktioner i klasserummet

“Er det her seriøst virkelige data?!! Ej, hvor vildt”

“Hold kæft, hvor det det smart med de der tabeller!! Må vi godt tage arbejdsarket med hjem?”

“Prøv at tænk, hvis man brugte talegenkendelsesteknologi på arlamcentralen! Så skulle kan godt nok have mange dialekter repræsenteret”.



Spørgsmål?

Mere fra ALBATROS

- Hør vores podcasts om teknologiforståelse i matematik. Der arbejdes på at få gjort dem tilgængelige. Tjek edtalk.dk for opdateringer
- Sæt kryds i kalenderen d. 28. april 2026. Vi afslutningskonference for Albatros projektet.
- Afprøv betaudgaver af vores forløb:
edtalk.dk/albatros-1
edtalk.dk/albatros-2
- Kontakt: pws@ind.ku.dk; andreas_tamborg@ind.ku.dk

Referencer

- Børne- og Undervisningsministeriet. (2025). *Råudkast: Fagplan for matematik - September 2025*. <https://uvm.dk/media/m01dyumn/250923-matematik-raaudkast-til-fagplan.pdf>
- Niss, M. (2015). Prescriptive modelling—challenges and opportunities. *Mathematical modelling in education research and practice: Cultural, social and cognitive influences*, 67-79. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_5
- Skovsmose, O. (2023). *Critical mathematics education*. Berlin/Heidelberg, Germany: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-26242-5>
- Sterlie, S., Weng, N., Feragen, A. (2024) *Generalizing Fairness to Generative Language Models via Reformulation of Non-discrimination Criteria*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2403.08564>