

Matematiske undersøgelser med og uden it

It i matematikundervisningen
i grundskole og gymnasium
Workshop

π

Det jeg har planlagt

- › Vend spidsen
- › Rejsetid
- › Apollonius sætning
- › To ligninger med to ubekendte – Gæt og prøv efter
- › FP10 maj 2022 – opgave 8
- › Et møntproblem
- › CAS – regneark – DGS

Vend Spidsen

Hvor få brikker kan man nøjes med at flytte for at få vendt spidsen i

› figur 4?

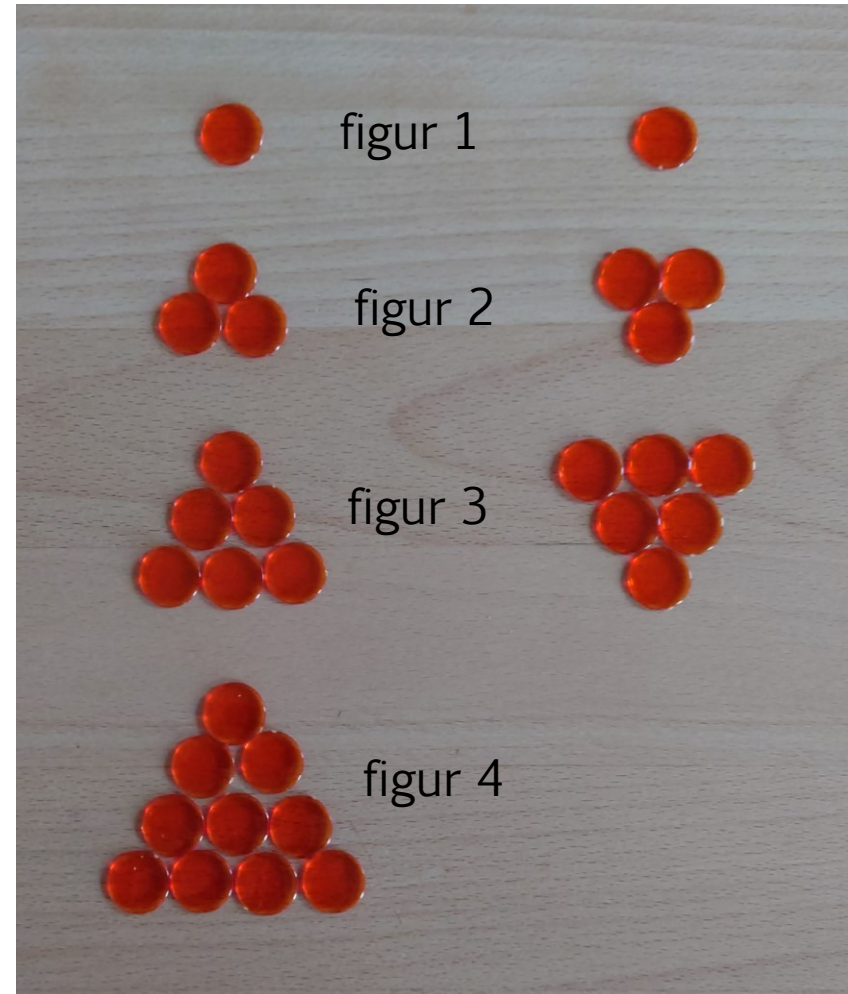
Opstil hypotese - undersøg

› figur 5?

› figur 6?

› figur 10?

› figur n?



VEND SPIDSEN

Brug app'en til den videre undersøgelse.

Skematisering

Systematisering

Generalisering

Hvordan kan et digital værktøj understøtte arbejdet?

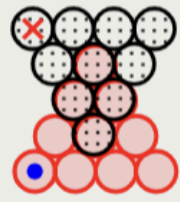
Vend spidsen

Skriv figurnummeret i det grønne felt.


Figuren kan flyttes ved at trække i det blå punkt.

Der er muligt at få vist en tilsvarende figur, hvor spidsen vender nedad.

Vis figur med spidsen nedad



Ved at trække i det røde kryds i figuren med spidsen nedad, kan man flytte rundt på den og se hvor mange brikker, der skal flyttes.



<https://tinyurl.com/26adk9vd>



Generalisering

› Rekursiv tilgang i et regneark.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1	Figur nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
2	Antal flyt	0	1	2	3	5	7	9											
3	Ekstra flyt til næste figur	1	1	1	2	2	2												

› Direkte formel – kan skrives på flere måder 😊

$$F(x) = \frac{\left\lfloor \frac{x-1}{3} \right\rfloor \cdot \left(\left\lfloor \frac{x-1}{3} \right\rfloor + 1 \right)}{2} + \frac{\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor \cdot \left(\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + 1 \right)}{2} + \frac{\left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor \cdot \left(\left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor + 1 \right)}{2}$$

› Trekanttal!

Diskuter

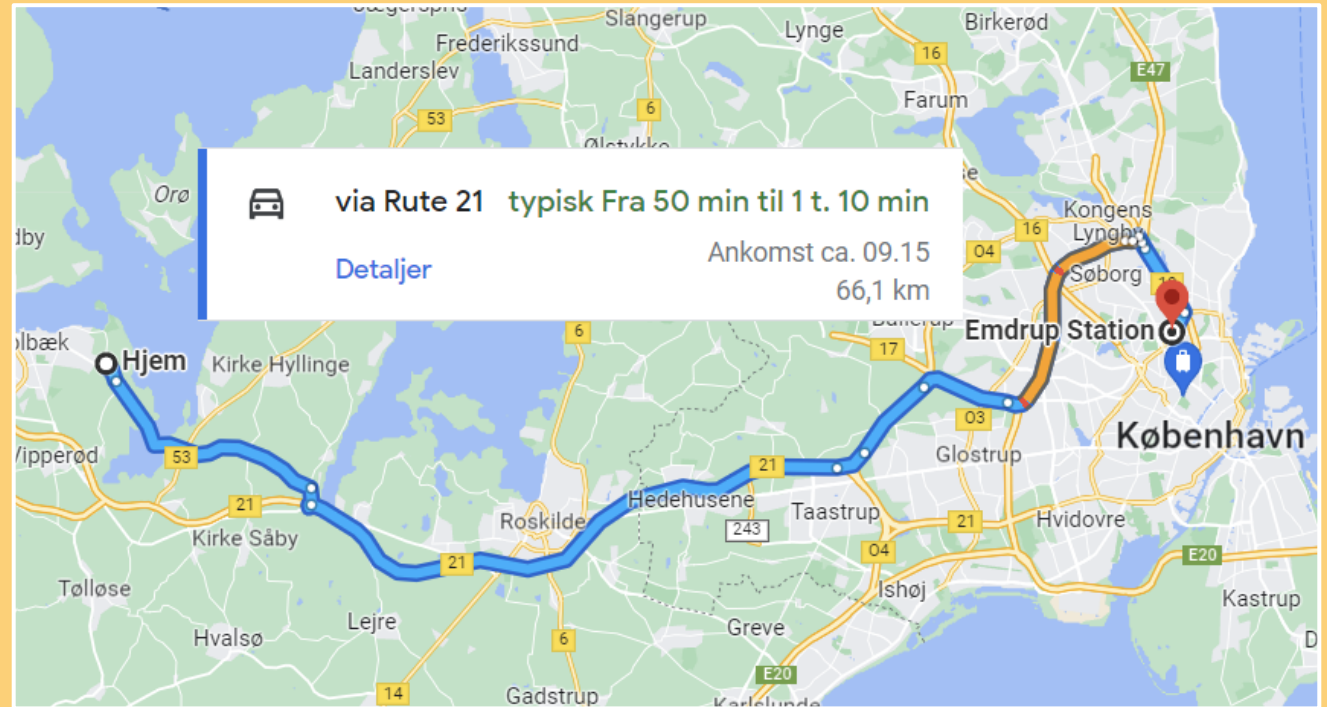
- › Udfordringer i forhold til
 - Elever på mellemtrin
 - Elever på afsluttende trin
 - Studerende på ungdomsuddannelserne
 - Studerende på læreruddannelsen

FRA A TIL B I BIL

HVOR LANG TID?

Kritisk modellering – der må være en model!

- › Hvilke forhold skal man tage i betragtning, når man opstiller en model for kørsel i bil?
- › Byg en model, der kan beregne køretiden fra A til B.
- › CAS eller regneark?



Matematik med it – III side 6-7

EN MODEL OPSTILLET I CAS – MATHEMATICA

Brug af enheder!

	A	B	C
1	Afstande		
2	motorvej	234 km	
3	landevej	37 km	
4	by	15 km	
5			
6	Hastigheder		
7	motorvej	108 km/t	
8	landevej	75 km/t	
9	by	50 km/t	
10			
11	Pauser		
12		60 minutter	
13			
14	Rejsetid	237,6 minutter	

Systematisering

Vejlængder, tid på dagen, hastighed, pauser, forsinkelser, vejtyper osv.

Definition af enheder

```
km := Quantity["km"]; t := Quantity["h"]; min := Quantity["min"]
```

Afstande

```
by = 15 km; landevej = 37 km; motorvej = 234 km;
```

Hastigheder

```
vby = 50  $\frac{\text{km}}{\text{t}}$ ; vlandevej := 75  $\frac{\text{km}}{\text{t}}$ ; vmotorvej := 108  $\frac{\text{km}}{\text{t}}$ ;
```

Andet

```
pauser = 40, min;  
forsinkelse = 20 min;
```

Beregning af rejsetid

```
rejsetid = pauser + forsinkelse +  $\frac{\text{by}}{\text{vby}}$  +  $\frac{\text{landevej}}{\text{vlandevej}}$  +  $\frac{\text{motorvej}}{\text{vmotorvej}}$ 
```

```
237,6 min |
```


BRUG AF GEOGEBRA TIL EN UNDERSØGELSE

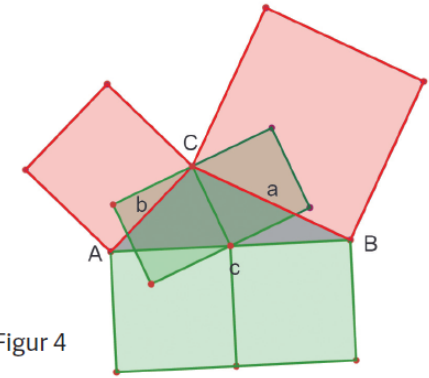
Undersøgelse

Hypotese

Undersøgelse af
hypotesens gyldighed.

Eventuelt et bevis.

Endnu en kendt græsk matematiker er Apollonius af Perga 262-190 f.v.t., som bl.a. fandt en sammenhæng mellem medianen i en trekant og siderne i en trekant. Figur 4 viser Apollonius' undersøgelse.

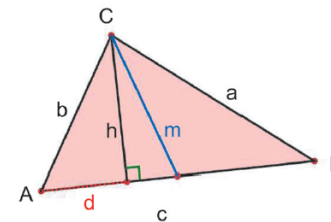


Figur 4

Opgave 2

- Tegn trekant ABC. Afsæt M som midtpunkt på siden c.
- Tegn medianen fra C.
- Tegn kvadrater på siderne a og b.
- Tegn kvadrater på begge sider af medianen og to kvadrater på siden c.
- Sammenlign arealerne af de to røde kvadrater med arealet af de andre fire kvadrater.
- Formuler en regel for sammenhængen mellem summen af de to røde kvadrater og summen af de andre fire kvadraters areal.
- Undersøg om reglen gælder for andre trekanter ved at flytte rundt på trekantens vinkelspidser.

Herunder er skitseret et bevis for sætningen.



Bevis at: $b^2 + a^2 = 2m^2 + 2\left(\frac{1}{2}c\right)^2$

Venstre side kan skrives som:

$$b^2 + a^2 = (d^2 + h^2) + ((c-d)^2 + h^2)$$

Højre side kan skrives som:

$$2m^2 + 2\left(\frac{1}{2}c\right)^2 = 2\left(h^2 + \left(\frac{1}{2}c - d\right)^2\right) + 2\left(\frac{1}{2}c\right)^2$$

Ved at udvide højresiden af begge disse udtryk ser man, at de er lig med hinanden.

GÆT OG PRØV EFTER - CAS

Opstille regneudtryk i et CAS-
værktøj.

Gætte på værdier.

Prøve efter.

Justere gæt.

Ikke navngivet beregning Ark 1

$\frac{\square}{\square}$ \square^{\square} $\sqrt{\square}$ \square^{\square} \square \square $0-0$ \square \square

børn = 50 Definer

unge = 100 Definer

voksne = $480 - \text{børn} - \text{unge}$ Definer

voksne = 330 Beregn

entre = $\text{børn} \cdot 12 + \text{unge} \cdot 150 + \text{voksne} \cdot 250$ Definer

entre = 98100 Beregn

Opgave 3

Til en cirkusforestilling kommer der 480 tilskuere, som i alt har betalt 88000 kr. Voksne over 18 år betaler 250 kr. i entre, unge fra 12-18 år betaler 150 kr. i entre og børn under 12 år betaler 100 kr. i entre.

- Find fem kombinationer af voksne, unge og børn, der ifølge oplysningerne kan være tilskuere til forestillingen.
- Find det samlede antal kombinationer af voksne, unge og børn, der opfylder betingelserne. Prøv at gætte først. Ramte du rigtigt?

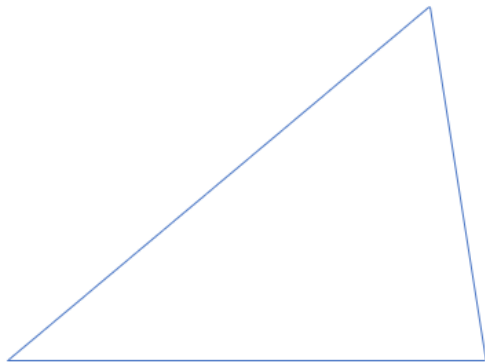
Solve [$88000 = 250x + 150y + 100z$ && $x + y + z = 480$, { x, y, z }, NonNegativeIntegers]

```
{ {x → 160, y → 320, z → 0}, {x → 161, y → 317, z → 2}, {x → 162, y → 314, z → 4}, {x → 163, y → 311, z → 6}, {x → 164, y → 308, z → 8},  
{x → 165, y → 305, z → 10}, {x → 166, y → 302, z → 12}, {x → 167, y → 299, z → 14}, {x → 168, y → 296, z → 16}, {x → 169, y → 293, z → 18},  
{x → 170, y → 290, z → 20}, {x → 171, y → 287, z → 22}, {x → 172, y → 284, z → 24}, {x → 173, y → 281, z → 26}, {x → 174, y → 278, z → 28},  
{x → 175, y → 275, z → 30}, {x → 176, y → 272, z → 32}, {x → 177, y → 269, z → 34}, {x → 178, y → 266, z → 36}, {x → 179, y → 263, z → 38},  
{x → 180, y → 260, z → 40}, {x → 181, y → 257, z → 42}, {x → 182, y → 254, z → 44}, {x → 183, y → 251, z → 46}, {x → 184, y → 248, z → 48},  
{x → 185, y → 245, z → 50}, {x → 186, y → 242, z → 52}, {x → 187, y → 239, z → 54}, {x → 188, y → 236, z → 56}, {x → 189, y → 233, z → 58},  
{x → 190, y → 230, z → 60}, {x → 191, y → 227, z → 62}, {x → 192, y → 224, z → 64}, {x → 193, y → 221, z → 66}, {x → 194, y → 218, z → 68},  
{x → 195, y → 215, z → 70}, {x → 196, y → 212, z → 72}, {x → 197, y → 209, z → 74}, {x → 198, y → 206, z → 76}, {x → 199, y → 203, z → 78},  
{x → 200, y → 200, z → 80}, {x → 201, y → 197, z → 82}, {x → 202, y → 194, z → 84}, {x → 203, y → 191, z → 86}, {x → 204, y → 188, z → 88},  
{x → 205, y → 185, z → 90}, {x → 206, y → 182, z → 92}, {x → 207, y → 179, z → 94}, {x → 208, y → 176, z → 96}, {x → 209, y → 173, z → 98},  
{x → 210, y → 170, z → 100}, {x → 211, y → 167, z → 102}, {x → 212, y → 164, z → 104}, {x → 213, y → 161, z → 106}, {x → 214, y → 158, z → 108},  
{x → 215, y → 155, z → 110}, {x → 216, y → 152, z → 112}, {x → 217, y → 149, z → 114}, {x → 218, y → 146, z → 116}, {x → 219, y → 143, z → 118},  
{x → 220, y → 140, z → 120}, {x → 221, y → 137, z → 122}, {x → 222, y → 134, z → 124}, {x → 223, y → 131, z → 126}, {x → 224, y → 128, z → 128},  
{x → 225, y → 125, z → 130}, {x → 226, y → 122, z → 132}, {x → 227, y → 119, z → 134}, {x → 228, y → 116, z → 136}, {x → 229, y → 113, z → 138},  
{x → 230, y → 110, z → 140}, {x → 231, y → 107, z → 142}, {x → 232, y → 104, z → 144}, {x → 233, y → 101, z → 146}, {x → 234, y → 98, z → 148},  
{x → 235, y → 95, z → 150}, {x → 236, y → 92, z → 152}, {x → 237, y → 89, z → 154}, {x → 238, y → 86, z → 156}, {x → 239, y → 83, z → 158},  
{x → 240, y → 80, z → 160}, {x → 241, y → 77, z → 162}, {x → 242, y → 74, z → 164}, {x → 243, y → 71, z → 166}, {x → 244, y → 68, z → 168},  
{x → 245, y → 65, z → 170}, {x → 246, y → 62, z → 172}, {x → 247, y → 59, z → 174}, {x → 248, y → 56, z → 176}, {x → 249, y → 53, z → 178},  
{x → 250, y → 50, z → 180}, {x → 251, y → 47, z → 182}, {x → 252, y → 44, z → 184}, {x → 253, y → 41, z → 186}, {x → 254, y → 38, z → 188},  
{x → 255, y → 35, z → 190}, {x → 256, y → 32, z → 192}, {x → 257, y → 29, z → 194}, {x → 258, y → 26, z → 196}, {x → 259, y → 23, z → 198},  
{x → 260, y → 20, z → 200}, {x → 261, y → 17, z → 202}, {x → 262, y → 14, z → 204}, {x → 263, y → 11, z → 206}, {x → 264, y → 8, z → 208},  
{x → 265, y → 5, z → 210}, {x → 266, y → 2, z → 212}
```

FP10 MAJ 2022 – OPGAVE 8

Nogle få elever brugte en
trekantberegner til at løse
opgaven.

WordMat's trekantsløser anvendes med input: $A = 40^\circ$, $a = 3$, $b = 4$



$$\begin{aligned} A &= 40^\circ \\ B &= 58,98697^\circ \\ C &= 81,01303^\circ \end{aligned}$$

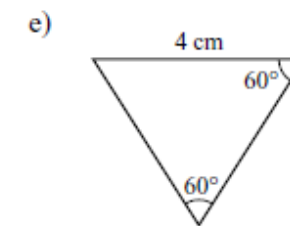
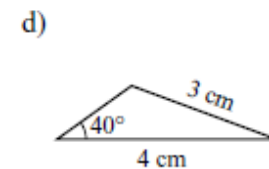
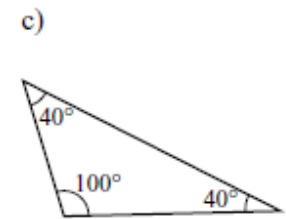
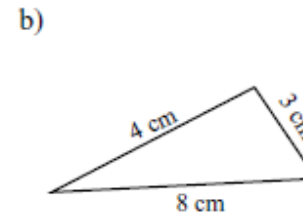
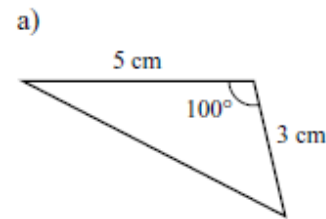
$$\begin{aligned} a &= 3 \\ b &= 4 \\ c &= 4,609877 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A &= 40^\circ \\ B &= 121,013^\circ \\ C &= 18,98697^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 3 \\ b &= 4 \\ c &= 1,518479 \end{aligned}$$

Skitserne viser 5 trekanter. Nogle af trekanterne kan komme til at se ud på forskellige måder, når man tegner dem med de viste mål. Andre af trekanterne kan man slet ikke tegne, eller de kan kun komme til at se ud på én måde.



Skitser

8.1 Undersøg for hver skitse, om man

- kan tegne netop én trekant med de viste mål.
- kan tegne flere forskellige trekanter med de viste mål.
- slet ikke kan tegne en trekant med de viste mål.

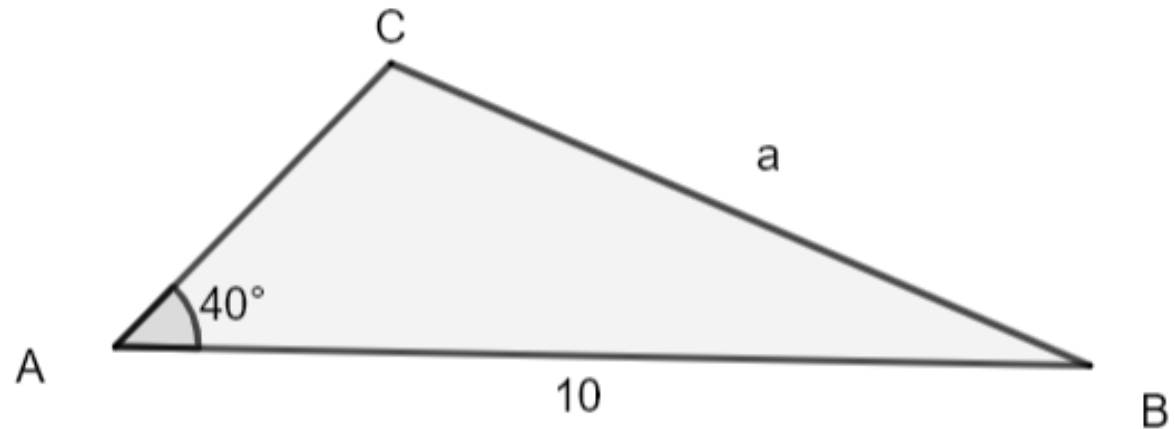
Du kan fx begrunde dit svar med præcise tegninger.

FORSLAG TIL JUSTERING AF OPGAVEN

Skitsen til højre viser en trekant.

Undersøg hvilke heltallige længder siden a , kan have for, at der

- kan tegnes en trekant
- kan tegnes to trekanter
- ikke kan tegnes en trekant.



Skitse

Endnu et mønt problem

- › På hvor mange forskellige måder kan man betale 20 kr., når man råder over 20 enkroner, 10 tokroner, 4 femkroner, 2 tikroner og 1 tyvekrone?



Hvad siger forskeren om CAS i grundskolen?

- › Brugen af CAS kan gøre algebraundervisningen i udskolingens undersøgelsesbaseret for eleverne og løfte deres vidensniveau.
- › Essentiel matematisk læring går tabt, når man bruger CAS til at løse traditionelle algebraopgaver.
- › Brugen af CAS åbner op for noget andet og mere, end når eleverne benytter papir og blyant.
- › Brug af CAS giver mulighed for at arbejde med mere komplekse algebraiske udtryk og at gøre det på en måde, hvor den algebraiske struktur træder tydeligt frem for eleverne.

Kilde: Louise Meier Carlsen

Teachers' Practice and Knowledge on School Algebra with CAS

CAS krav til værktøjet

Værktøjet skal

- › kunne beregne almindelige regneudtryk
- › være dynamisk
- › kunne manipulere algebraiske udtryk
- › kunne bruges til matematiske undersøgelser
- › kunne løse ligninger
- › give mulighed for at undersøge matematiske modeller
- › kunne bruges i forbindelse med skriftlig kommunikationen

CAS styrker/muligheder

Brug af et CAS-værktøj gør det muligt for eleverne sikkert

- › at beregne komplicerede regneudtryk (talknuser)
- › at omskrive regneudtryk, hvor der indgår variable
- › at undersøge algebraiske sammenhænge
- › at arbejde undersøgende med rent matematiske emner
- › at (opstille og) løse regneteknisk avancerede, men matematisk simple ligninger
- › at opstille og undersøge gyldigheden af en matematisk model.
- › at gennemføre digitale simuleringer ved at ændre på værdien af variable i en matematisk model (hvad sker der hvis...)

CAS udfordringer/svagheder

- › Blackbox
- › Symbolbehandling
- › Særlig syntaks
- › Mindst tre forskellige lighedstegn ($=$, $:=$, $==$)
- › Ikke udviklet til undervisningsbrug
- › Didaktik (begrænset/manglende kendskab)
- › Kræver kendskab til både matematik og værktøj
- › Redskab - instrument

Hvad siger forskeren om DGS i grundskolen?

› DGS har potentiale til at fremme eleveres matematiklæring, blandt andet udvikling af ræsonnementskompetencen.

4 Funktioner ved brug af fx GeoGebra

- 1) Dragging
- 2) Feed back
- 3) Måle geometriske egenskaber
- 4) Sporing

Kilde: Ingi Heinesen Høgsted
Toward Marvels in Dynamic Geometry
Teaching and Learning

Dynamisk Geometri styrker/muligheder

- › Udviklet til undervisningsbrug
- › Dynamiske undersøgelser (trække og måle)
- › Ræsonnement & Bevis cyklus
- › Trække i punkter mm (dragging)
- › Måling af længder, vinkler og arealer
- › Sporing af objekter
- › Præcise tegninger - Konstruktion
- › Konstruktionsbeskrivelse
- › Trinvis visning af konstruktionen

DGS – Udfordringer/svagheder

- › Figurerne bliver mindre konkrete
- › Uoverskuelig konstruktion
- › Læring – udvikling af begreber og forståelse
- › Tegning af skitser
- › Måler på skærmen
- › Skærmindstillinger
- › Black Box

Regneark styrker/muligheder

Brug af regneark gør det muligt for eleverne

- › at behandle store datasæt
- › at beskrive, analysere, præsentere og tolke data
- › at arbejde med trinvis fremskrivning af fx afbetaling, vækst mm.
- › at arbejde med matematiske modeller som fx budgetter
- › at simulere både stokastiske og deterministiske modeller
- › at finde sammenhæng mellem to datasæt (regression)
- › (at støtte i udvikling og forståelse af variabelbegrebet)

Regneark udfordringer/svagheder

- › Vanskelig syntaks
- › Formlerne er skjulte
- › Absolut og relativ cellehenvisning
- › Løsningen af et problem drukner let i regnearksteknik.
- › Matematisk kommunikation

Afsluttende kommentarer eller spørgsmål!

Tak for nu.