

# Matematiske undersøgelser

It i matematikundervisningen  
i grundskole og gymnasium

$\pi$

π

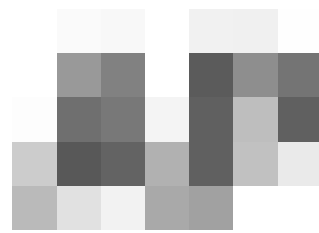


MARTS 2023

NIELS JACOB HANSEN

$$1 + 58 + 51 = 110$$

$$15\ 851 : 11 = 1441$$



15 851

$$1441 : 11 = 131$$

$$11 \cdot 11 = 121$$

# Dejlig matematikmorgen

›  $15\ 851 \rightarrow 1 + 58 + 51 = 110$

›  $D_{15\ 851} = \{1, 11, 121, 131, 1441, 15\ 851\}$



CAS-  
undersøgelse

```
1212
14641

1312
17161

Select[Prime[Range[PrimePi[10000], PrimePi[99999]]],
PalindromeQ]
{10301, 10501, 10601, 11311, 11411, 12421, 12721, 12821, 13331,
13831, 13931, 14341, 14741, 15451, 15551, 16061, 16361, 16561,
16661, 17471, 17971, 18181, 18481, 19391, 19891, 19991, 30103,
30203, 30403, 30703, 30803, 31013, 31513, 32323, 32423, 33533,
34543, 34843, 35053, 35153, 35353, 35753, 36263, 36563, 37273,
37573, 38083, 38183, 38783, 39293, 70207, 70507, 70607,
71317, 71917, 72227, 72727, 73037, 73237, 73637, 74047,
74747, 75557, 76367, 76667, 77377, 77477, 77977, 78487,
78787, 78887, 79397, 79697, 79997, 90709, 91019, 93139,
93239, 93739, 94049, 94349, 94649, 94849, 94949, 95959,
96269, 96469, 96769, 97379, 97579, 97879, 98389, 98689}
```

# Punkter

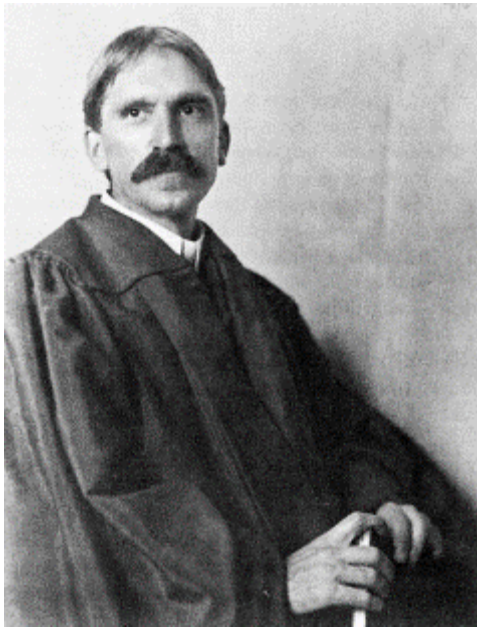
- › Hvorfor undersøgende matematik?
- › Grundprincipper for undersøgende matematik
- › Typer af undersøgende udfordringer
- › Struktur i en undersøgende matematikundervisning
- › Handlinger og kommunikation i et undersøgende matematisk klasseværelse

# Hvorfor undersøgende arbejdsformer i matematik?

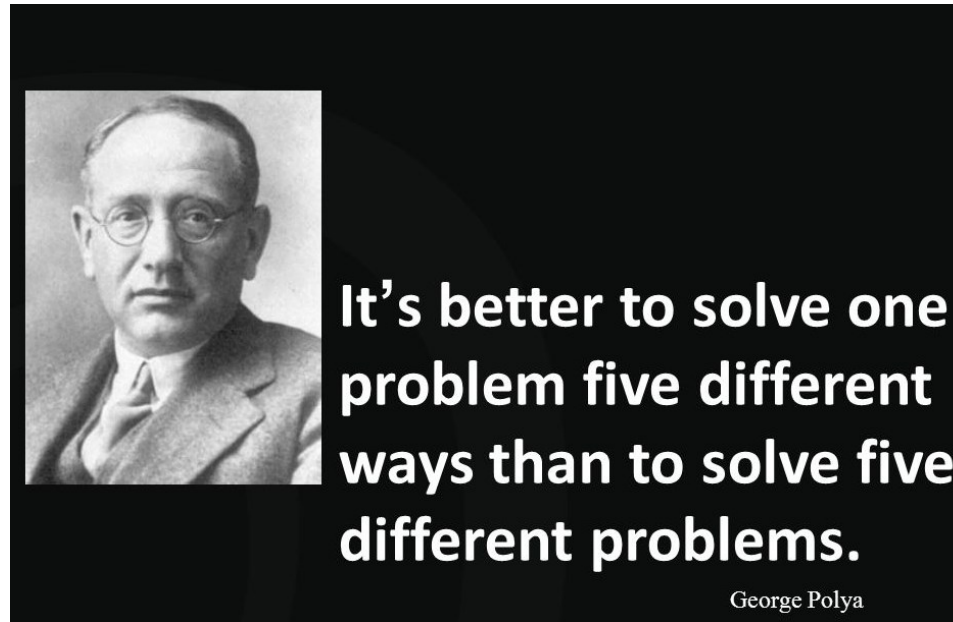
- › Styrke elevernes interesse for matematik (og naturfag).
- › Udvikling af elevernes problemløsnings- og modelleringskompetence.
- › Forbedret læringsudbytte!
- › Politiske begrundelser! ([www.scientix.eu](http://www.scientix.eu))

# Didaktiske rødder

Den undersøgende arbejdsmåde har stærke rødder i Deweys learning by doing (1920'erne) og Polyas tanker om problemløsning beskrevet i "How to solve it" (1945)

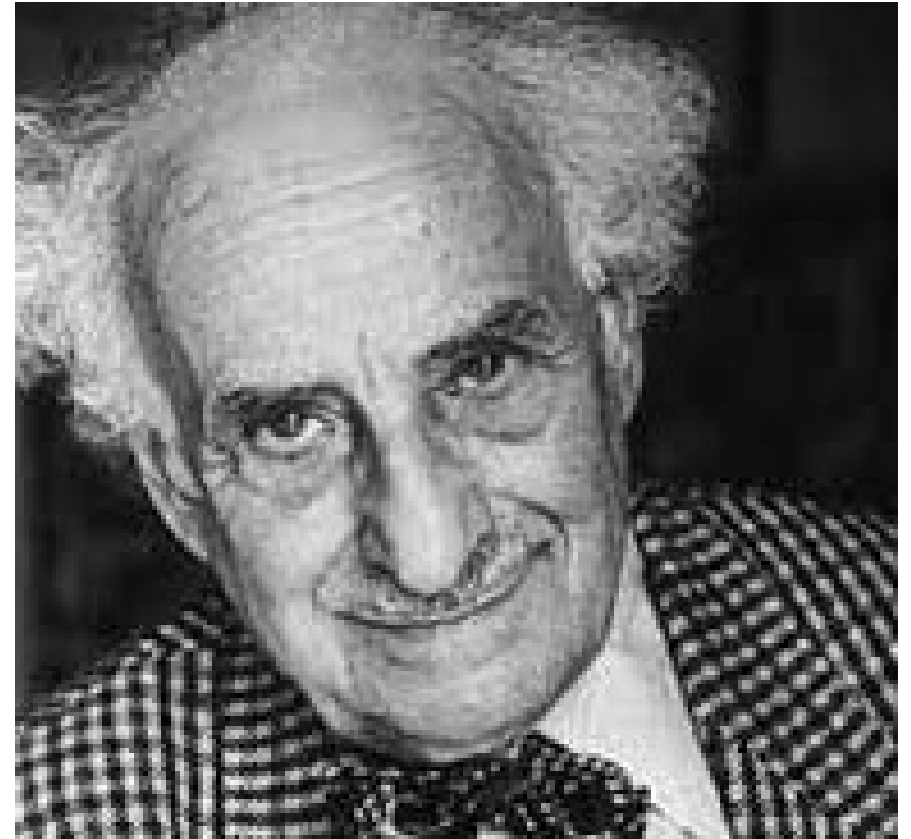


John Dewey 1902



# RME – Hans Freudenthal m.fl.

- › Hvad er matematik?
  - Matematik er en menneskelig aktivitet. Der ligger en lang række mentale processer til grund for tilvejebringelse af ny matematisk erkendelse og for et individs tilegnelse af et matematisk begreb.
  - Den efterfølgende nedskrivning med definition, sætning og bevis er blot en efterrationalisering. (Freudenthal)





# Freudenthal

Den lærende skal

- › genopdage(matematikken)
- › kunne matematisere i stedet for at arbejde med at lære matematik.
- › tænke abstrakt frem for at arbejde med abstrakte begreber.
- › systematisere i stedet for at arbejde med systemer og metoder.
- › kunne arbejde med at opdage fremgangsmåder i stedet for at arbejde med at lære algoritmer/metoder.
- › kunne sætte ord på matematikken fremfor at lære matematikkens sprog.

# Grundprincipper for undersøgende undervisning i matematik?

1. Forstå omverdenen gennem undersøgende aktiviteter
2. Videnskabelig viden udvikles gennem grundlæggende nysgerrighed
3. Sand viden er effektiv i forhold til at forstå omverdenen.
4. Eleven skal lære gennem undersøgelse og refleksion i sociale fællesskaber.
5. Elevernes erfaringer og viden er centrale, og viden almengøres gennem fælles refleksioner.
6. Viden almengøres ved refleksion over fælles erfaringer.
7. Uddanne eleverne til aktiv og kritisk deltagelse og udvikling af det demokratiske samfund

Kilde: Dewey efter Blomhøj (2016)

# Hvad er en undersøgende aktivitet?

## Det eksplorative (Opdagelsesrejsen)

Det eksplorative består i at være en nysgerrig og observerende person, som uden fast og styrende problemstilling undersøger et begreb, et fænomen eller en genstand. Man er således en opdagelsesrejsende ud i det ukendte, hvor man undervejs justerer mål og arbejdsproces.



## Det investigerende (Undersøgelsen)

Det investigerende består i at forfølge nogle hensigtsmæssige strategier for at finde et kvalificeret svar på en fastsat problemstilling. Problemstilling er ledetråden i arbejdsprocessen - en kurssætter som løbende skal sikre styringen mod et kvalificeret svar.



# Typer af undersøgende aktiviteter!

**Opdagelsen**



**Grubleren**



**Produktet**



**Målingen**



**Modelleringen**



Kilde: [www.kidm.dk](http://www.kidm.dk)

# Opdagelsen



- › Hovedhensigten med opdagelsen er, at eleverne, gennem en guidet aktivitet, skaffer sig indsigt i og forståelse for udvalgte matematiske begreber. Det undersøgende består i, at eleverne ikke kender de faglige pointer, de skal finde frem til ved at eksperimentere og danne sig erfaringer. De skal således få øje på sammenhænge og systemer, som kan lede dem mod en generaliseret viden inden for det udvalgte matematiske stofområde.
- › Det undersøgende bliver et middel til læring.

# Grubleren

- › Hensigten med grubleren er, at eleverne udvikler deres problemløsningsevner og ræsonnerende evner. Det centrale er ikke stoffet, men om eleverne kan, og vil, anvende ræsonnementer og systematisk undersøgelse. Fokus er således på elevernes undersøgende metodik.
- › Grubleren forekommer i mange afskygninger af både rent matematiske og mere virkelighedsorienterede opgaver.
- › Det undersøgende bliver et læringsmål i sig selv.



# Produktet

- › Hensigten er her, at eleverne fremstiller et produkt, som "virker" –ud fra både funktionelle og æstetiske perspektiver. Det undersøgende består i, at eleverne tager ejerskab, og går længere end til blot at følge en angivet fremstillingsproces. De begynder at eksperimentere og forandre såvel proces som produkt. Her kan indgå skabende innovative designprocesser og elevernes nysgerrighed som det bærende element, hvilket giver en mere eksplorativtilgang til det undersøgende.



# Målingen

- › Hensigten med Målingen er **at anvende matematik** i en naturvidenskabelig ramme ved at foretage "en undersøgelse" med anvendelse af måltal, beregning og statistik. Eleverne er således underlagt nogle "videnskabelige krav og retningslinjer" for at gøre undersøgelsens resultat tilstrækkelig pålidelig og gyldig.
- › Der er klare tværfaglige kontakter til skolens naturfag hvor matematik indgår som redskabsfag.





# Modelleringen

- › Eleverne skal forholde sig til en problemstilling i hverdagen, som skal afgrænses og omsættes til en matematisk beskrivelse og analyse. På baggrund af det skal eleverne tolke de svar, de får, og forholde sig kritisk til deres model.
- › Her er der mange åbne ukendte elementer for såvel lærere som elever. Der indgår blandt andet en åbenhed i, hvilke variable og størrelser, der er relevante for at skabe en anvendelig matematisk model til beskrivelse og analyse af problemet. Der er en åbenhed i mulige resultater, som afhænger af de præmisser, eleverne har opstillet



Aktivitet	Type	Formål	Perspektiv	Problem	Metode	Resultat
Opdagelsen	Investigerende	Afprøve og udlede begrebsmæssige sammenhænge	Lærer	Kendt	Kendt	Kendt
			Elever	Lukket	Åbent	Åbent
Grubleren	Investigerende	Udvikle problemløsningsevne	Lærer	Kendt	Kendt	Kendt
			Elever	Åbent	Åbent	Lukket
Produktet	Eksplorativt	Foretage eksperimenterende ændringer (opfinde)	Lærer	Kendt	Kendt	Kendt
			Elever	Lukket/ åbent	Lukket/ åbent	Lukket/ åbent
Målingen	Investigerende	Videnskabelig undersøgelse gennem måling og beregning	Lærer	Kendt	Kendt	Ukendt
			Elever	Lukket	Lukket	Åbent
Modelleringen	Investigerende	Udvikle og afprøve matematiske modeller	Lærer	Kendt/ ukendt	Ukendt	Ukendt
			Elever	Åbent	Åbent	Åbent

$\pi$

# Hvor mange forskellige beløb kan man betale med...?

Inden jeg tog af sted i morges tjekkede jeg lige hvilke mønter, jeg havde i min pung.

I pungen lå 1 enkrone, 2 tokroner, 3 femmere og 1 tier

- › Hvilke forskellige beløb kan jeg betale med mønterne i min pung?
- › Hvilket beløb kan jeg betale på flest måder?



# Hvordan kan en undersøgende undervisning struktureres?

Iscenesættelse



Aktivitet

Fællesgørelse/opsamling

Blomhøj, 2016

$\pi$

# Iscenesættelse

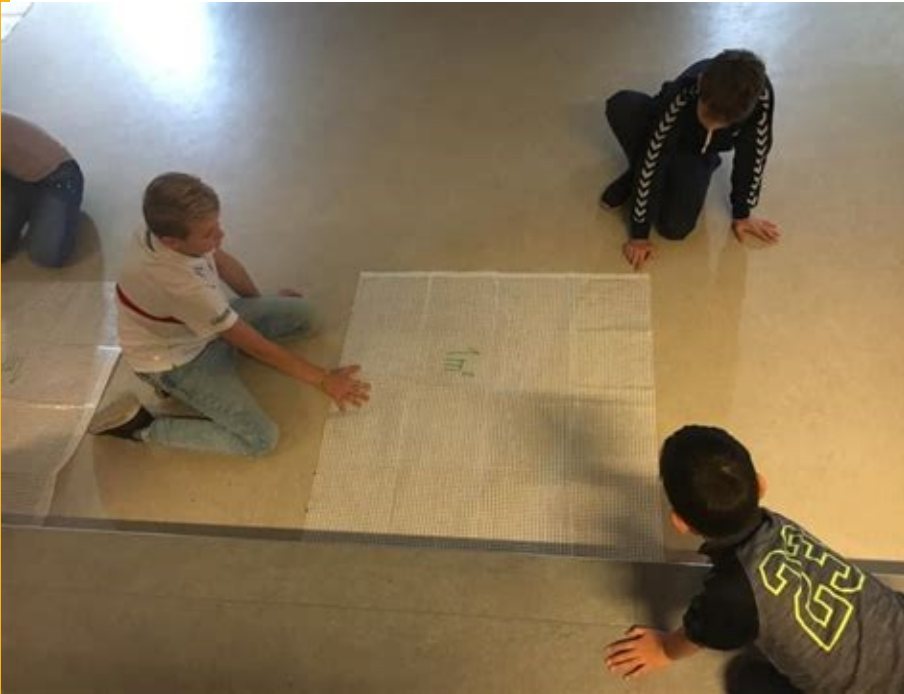


- › Sceniske virkemidler (fx genstand og historie) for at øge motivationen
- › Tid
- › Klarhed og afgrænsning
- › Hvilken dialog?
- › Kontakt og accept - den didaktiske kontrakt

## Om iscenesættelse – udsagn fra lærere

- › *”Det er lidt svært, da det er nyt, at man som lærer også skal være skuespiller - men det virker!”*
- › *”Opgaverne med burhøns og afrikansk skole var rigtige spændende for eleverne og det skyldtes i høj grad at iscenesættelsen var god.”*
- › *”Iscenesættelsen kan være sjov at diskutere og lave med en fagkollega, hvis det er muligt - giver energi 😊”*
- › *”Iscenesættelsen har stor betydning. En af lærerne kom til at forvirre eleverne med sin iscenesættelse i stedet for at guide eleverne, det betød at den efterfølgende aktivitet (den med kasserne) ikke gik som forventet.”*

# Eleverne i aktivitet



- › Hints – ”aktionsrytme”
- › Elevens deltagelsesret og -pligt
- › Kendskab til undersøgende arbejdsformer
- › Lærerrollen
- › Den løbende elev/elev og lærer/elevdialog
- › Marginalgrupperne



# Handlinger og kommunikation i det undersøgende matematiske klasseværelse

Eksemplificere	Færdiggøre, slette, korrigerer	Sammenligne, sortere, organisere
Giv mig et eller flere eksempler på	Hvad skal der mere af/slettes/ændres ... hvis ...	Hvad er det ens og forskelligt ved
Beskriv, vis, find et eksempel på ...	Forklar, hvad der er galt med ...	Kan man sortere ... for at forklare ...
Er ... et eksempel på, at ...	Hvad skal der ændres på, hvis ....	
Kan du vise et eksempel på ...		
Er der nogle særlige eksempler på ...	Watson, A og Mason, J (1998) MARTS 2023	NIELS JACOB HANSEN





# Handlinger og kommunikation i det undersøgende matematiske klasseværelse

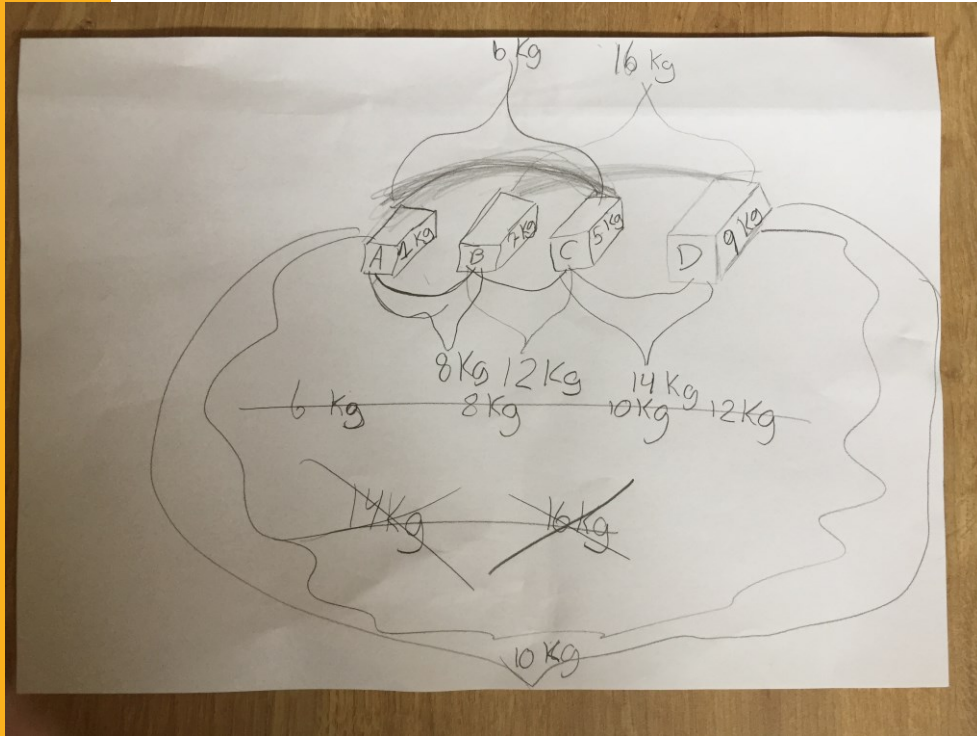
Ændre, variere, det modsatte af	Generalisere	Forklare, argumentere, sandsynliggøre, overbevise, afvise
Ændre på en værdi for at se, hvad der sker	Hvad sker der ...	Forklar hvorfor .../Forklar hvorfor ikke ...
Hvad nu hvis ...	Sker det altid, nogen gange, eller aldrig?	Overbevis mig om at ... Kan du give et ræsonnement for at ...
Hvis dette er svaret, hvad var så spørgsmålet?	Beskriv alle muligheder når ... så nøjagtigt du kan	Hvordan kan vi være sikre på at ...
Kan det ... løses på mere end en måde, hvad er hurtigst, lettest, mest smart...?	Hvad kan ændres når ... og hvad vil du holde fast i?  Passer det stadig at ...?	Er det altid forkert (falskt) at ...
Kan man ændre på de opstillede betingelser?	Watson, A og Mason, J (1998) MARTS 2023	Forklar hvordan, du bruger i ...

# Elevernes undersøgende metoder

- › Beskriv problemet
- › Gæt og prøv efter
- › Tegn problemet
- › Brug tabeller eller diagrammer
- › Prøv med enkle eksempler
- › Led efter mønstre
- › Brug hjælpemidler
- › Tænk logisk

Joensen, Lars, 2023

# Opsamling/fællesgørelse – en udfordring



- › Mangler vi erfaringer og organisationsformer?
- › At stille ”gode opsummerende spørgsmål”
- › Vidensdeling versus pointestyret deling.

# Vidensdeling

- › At skabe rum for at eleverne præsenterer og respekterer hvad de hver især har lavet og fundet ud af.
- › At give mulighed for at vise en spredning af forskellige ideer og erkendelser – hvor man opnår en vis form for fællesklasseviden.
- › At synliggøre repertoiret af strategier der findes og vise, at mennesker tænker forskelligt selvom det er samme problemstilling.



# Pointestyret deling

- › Læreren fokuserer diskussionen på de faglige pointer – der sker således en udvælgelse og måske en rækkefølge i det der præsenteres.
- › Konsekvensen er at det kun er nogle der kommer frem
- › Læreren guider eleverne til at nærme sig en mulig faglige pointe eller ræsonnement



## Om opsamling/fællesgørelse

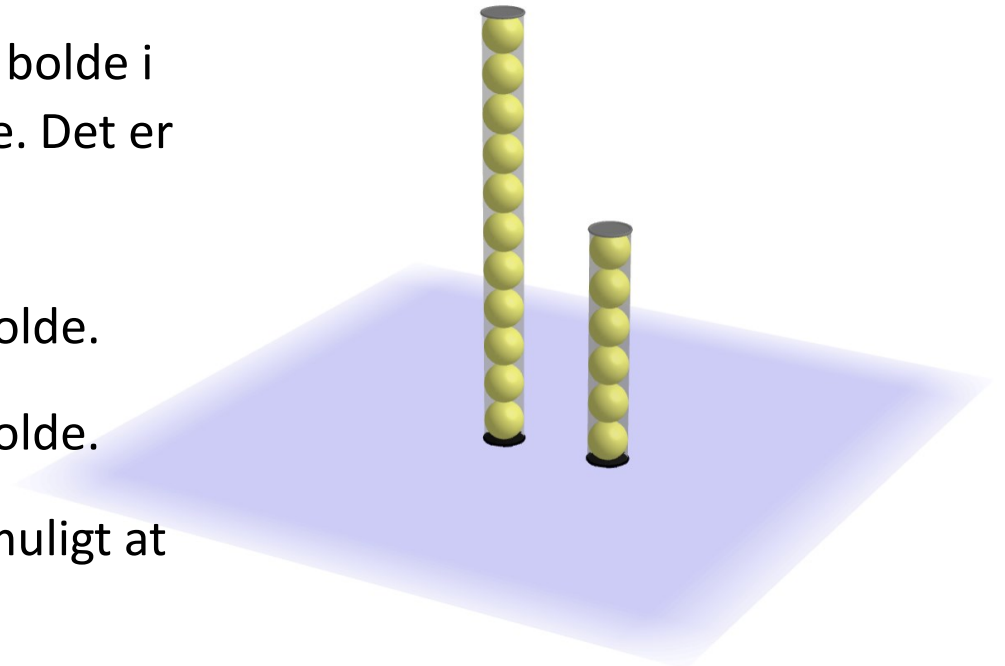
- › *”Dels har eleverne ”talt” meget mere matematik og har skulle være forklarende.”*
- › *”Fællesgørelsen/opsamlingen har det ofte svært. Den ligger ofte i slutningen af lektionen, hvor eleverne mentalt er på vej til pause. Tiden bliver måske lidt presset. I stedet kan det være en ide at placere fællesgørelsen i den kommende matematiktime.”*
- › *”Det at der er et produkt, fx en planche eller film, som grundlag for opsamlingen, er med til at eleverne påtager sig ansvaret for at arbejde med opgaven.”*

# Tennisbolde

Tennisbolde bliver solgt i rør med overtryk for at luften ikke skal gå af boldene før, de bliver taget i brug.

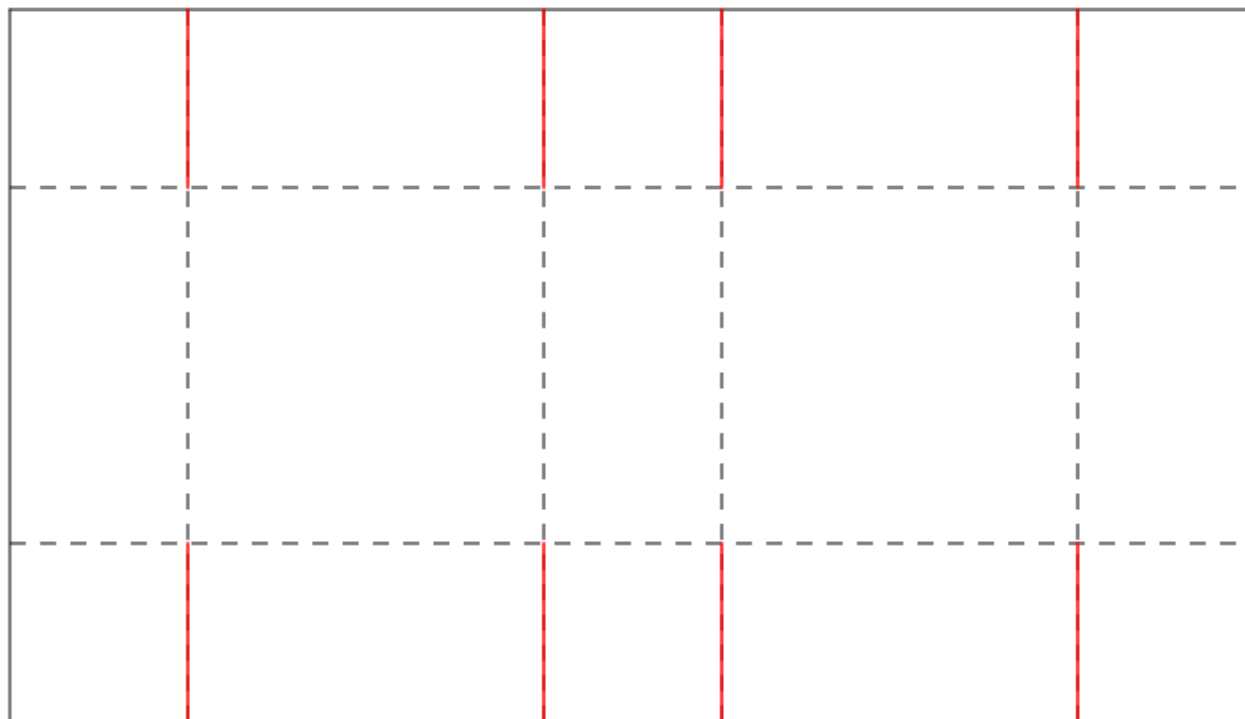
En producent af tennisbolde har valgt at sælge sine bolde i to størrelser rør, der indeholder 6 bolde og 11 bolde. Det er kun muligt at købe boldene i rør.

- Undersøg, om det er muligt at købe præcis 41 bolde.
- Undersøg, om det er muligt at købe præcis 25 bolde.
- Opstil en liste med det antal bolde, som det er muligt at købe.
- Undersøg, om det er muligt at købe 100 bolde på forskellige måder.
- Hvad nu hvis ...?



$\pi$

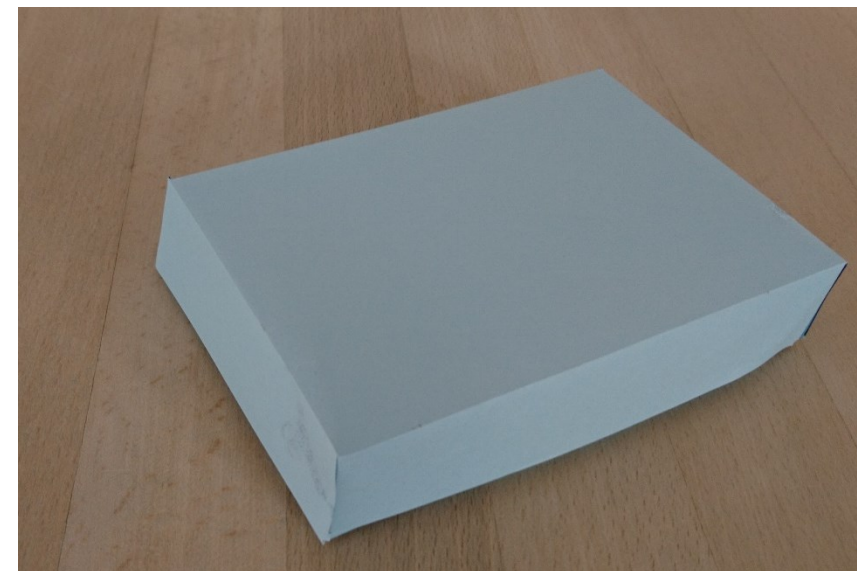
# Gaveæske med låg



Skitse

De stiplede linjer er foldelinjer.

De røde linjer er klippelinjer.





# Gaveæske med låg af A4-papir

Hvor stort bliver rumfanget, hvis højden er 3 cm ?

Hvor stort kan rumfanget blive, når man bruger et A4-papir.

Hvor stort kan rumfanget blive, når man bruger et stykke papir med dimensionerne  $x$  cm  $\cdot$   $y$  cm?



# Gaveæske til 4 pakker

## Undersøgelse

- › Hvilke mål skal en gaveæske med låg have, når den skal indeholde 4 pakker saltlakrids?
- › I må kun måle på en æske!
- › Diskuter og skitser, hvilke mål gaveæsken skal have.
- › Fremstil æsken.
- › I skal kunne redegøre for jeres overvejelser.
- › Vi slutter af med at undersøge om gaveæsken kan indeholde 4 pakker saltlakrids.



Spørgsmål?

Tak for opmærksomheden 😊

$\pi$

# Referencer/kilder/inspiration

Blomhøj, Morten (2016): Fagdidaktik i matematik, Frydenlund

Pind, Pernille (2015): Åben og undersøgende matematik, Pind og Bjerre

Watson, A og Mason, J (1998) – Questions and prompts for Mathematical Thinking, ATM

Wynne Harlen, MONA 2011-3

Hansen, H.C. m.fl. (2008): DELTA, Samfundslitteratur

KiDM, [www.kidm.dk](http://www.kidm.dk)

Watson, A og Mason, J (1998) – Questions and prompts for Mathematical Thinking, ATM  
Joensen. Lars m.fl. 2023, Lær at undersøge, Alinea (udkommer medio 2023)



# Link til sider med opgaver og udfordringer

Link	Kort beskrivelse
<a href="http://www.matematikk.org">www.matematikk.org</a>	Norsk side med udfordringer til forskellige klassetrin
<a href="http://www.gruble.net">www.gruble.net</a>	Norsk side med masser af grubleopgaver – vælg fx matematik
<a href="https://nrich.maths.org/">https://nrich.maths.org/</a>	Engelsk side med matematiske udfordringer på mange niveauer
<a href="http://www.cut-the-knot.org/">http://www.cut-the-knot.org/</a>	Engelsk side med mange interaktive appletter. Alle matematiske områder er repræsenteret.
<a href="http://www.fi.uu.nl/wisweb/applets/mainframe_en.html">http://www.fi.uu.nl/wisweb/applets/mainframe_en.html</a>	Freudenthal instituttets side med mange interaktive applets. Alle matematiske områder er repræsenteret. Siden er på engelsk – det er dog muligt at vælge hollandsk 😊
<a href="http://www.matematikkenteret.no/content/5060/Laringsressurser">http://www.matematikkenteret.no/content/5060/Laringsressurser</a>	Norsk side med mange gode ideer – her er det også muligt at finde gamle opgaver til kappabel konkurrencen
<a href="http://dkmat.dk/aktiviteter/nordisk-matematikkonkurrence/">http://dkmat.dk/aktiviteter/nordisk-matematikkonkurrence/</a>	Her er det muligt at hente gamle opgaver fra konkurrencen.
<a href="http://kaenguruen.dk/">http://kaenguruen.dk/</a>	Konkurrence for mellemtrinnet