

Digital matematik med mening?

med fokus på programmering i
matematikundervisningen

Morten Misfedt
NCUM Matematikdidaktikkens dag 17/3 2023

KØBENHAVNS UNIVERSITET



Tre dele

Når teknologien udfordrer matematikkens meningsfuldhed

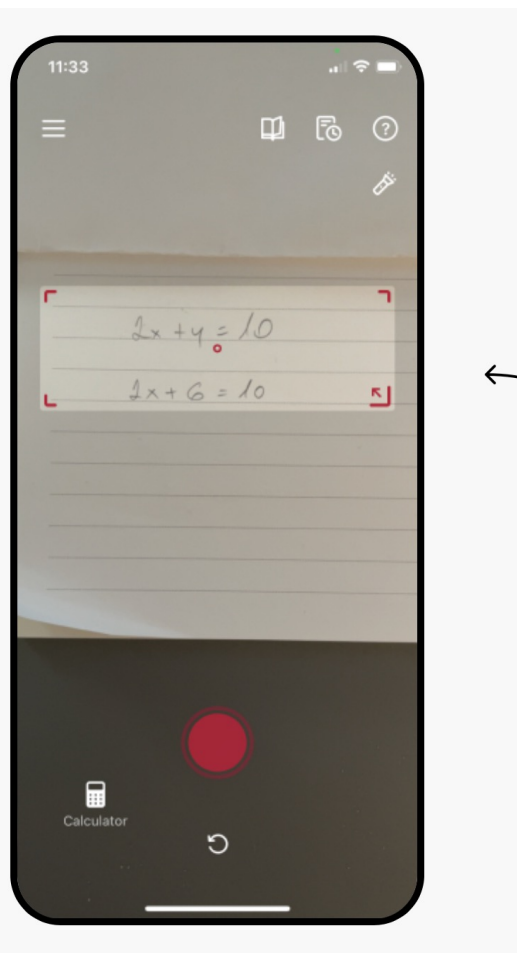


Forsøgene på at tage teknologiuddannelse ind i matematikundervisningen

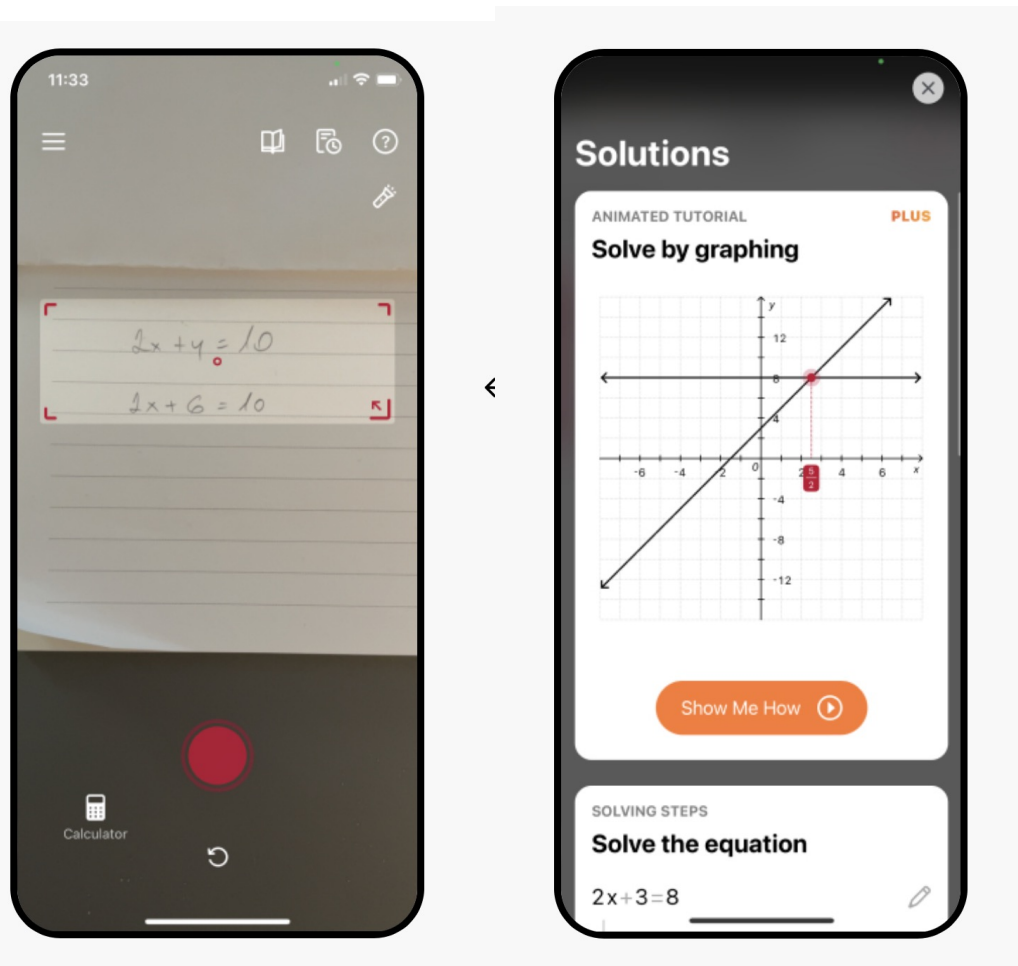


Matematikundervisning som post-digital?

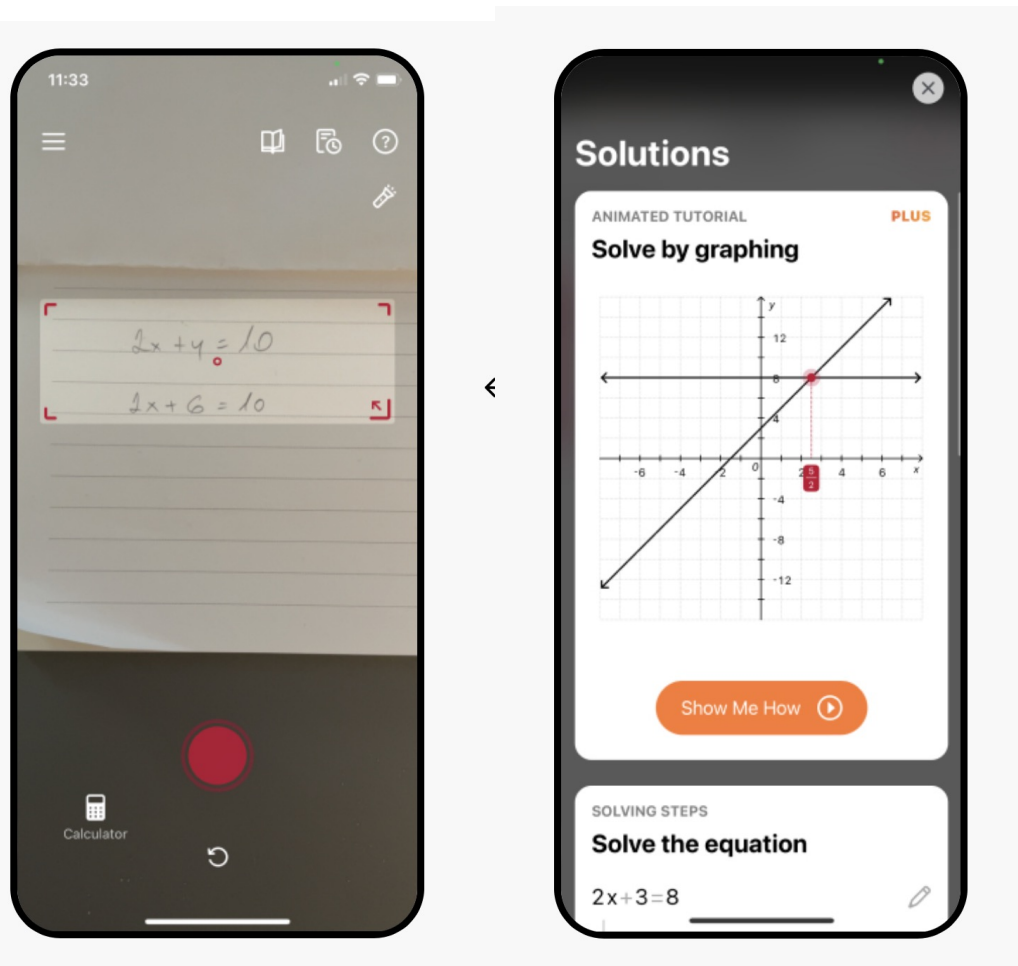
Photomath, cossincalc, casificering



Photomath, cossincalc, casificering



Photomath, cossincalc, casificering



 **WolframAlpha** computational intelligence™

$$x^3 - 2x = 3$$

 NATURAL LANGUAGE

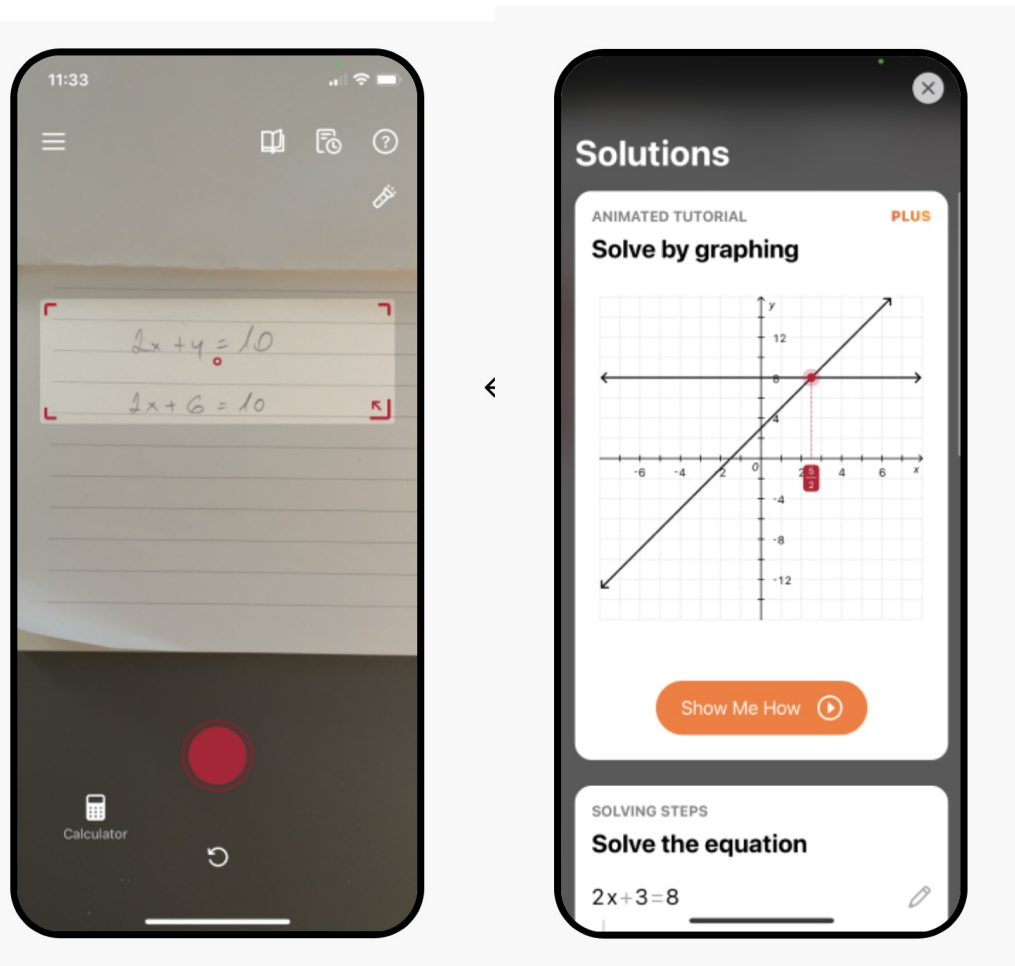
 MATH INPUT

 EXTENDED KEYBOARD

 EXAMPLES



Photomath, cossincalc, casificering



$$x^3 - 2x = 3$$

NATURAL LANGUAGE

MATH INPUT

EXTENDED KEYBOARD

EXAMPLES



Input

$$x^3 - 2x = 3$$

Alternate forms

$$x^3 = 2x + 3$$

$$x(x^2 - 2) = 3$$

$$x^3 - 2x - 3 = 0$$

Number line



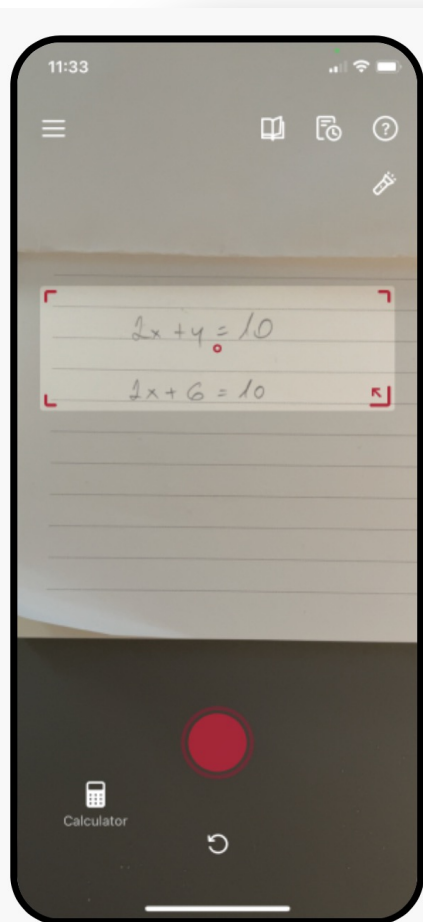
Real solution

More digits

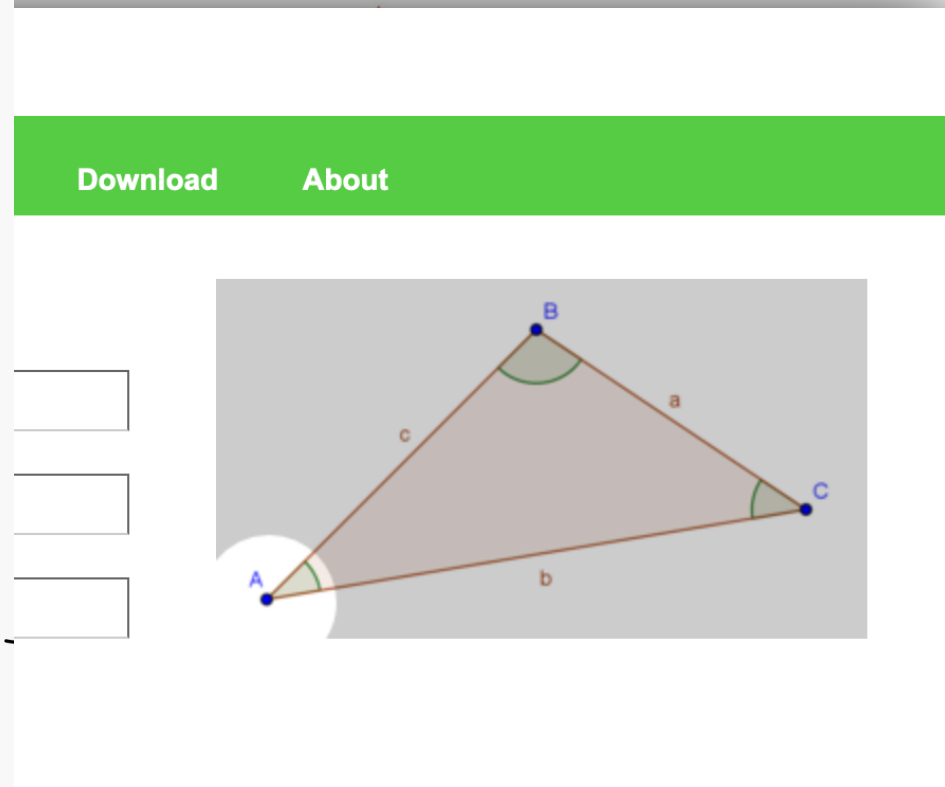
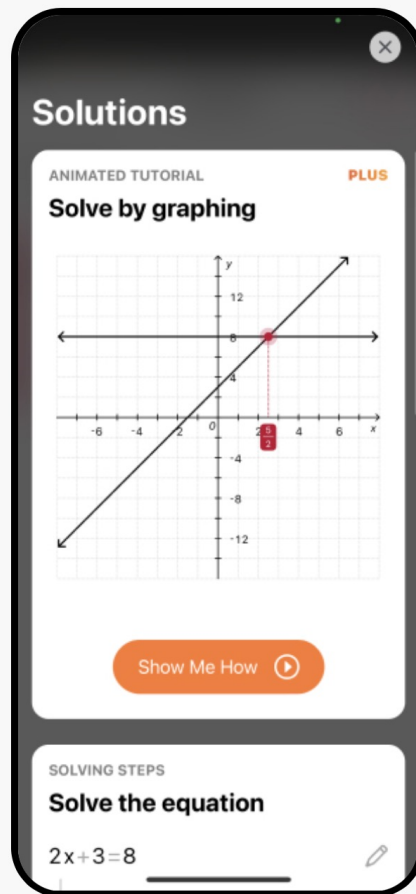
Exact form



Photomath, cossincalc, casificering



<



computational intelligence™

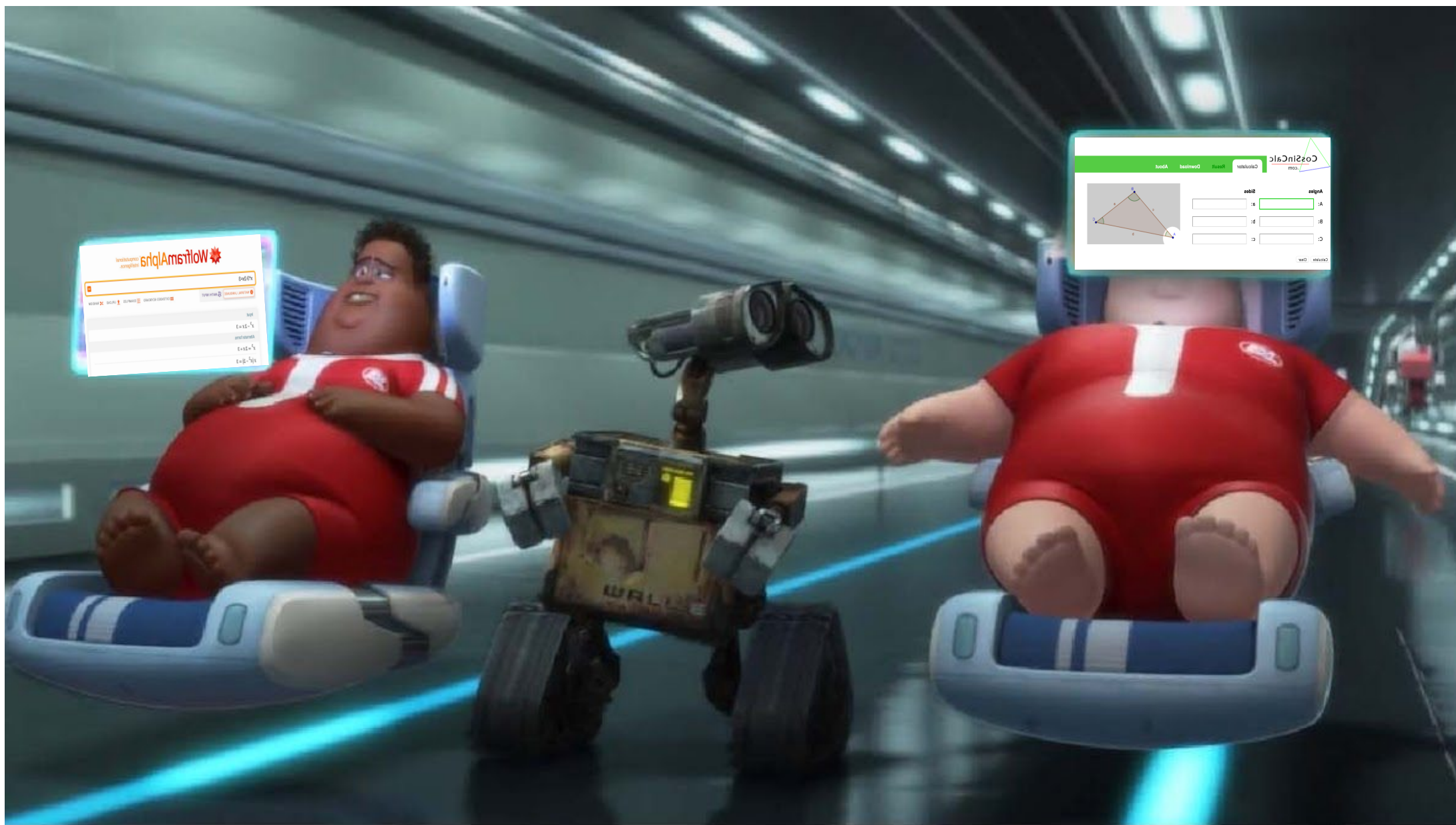
EXAMPLES

Real solution

More digits

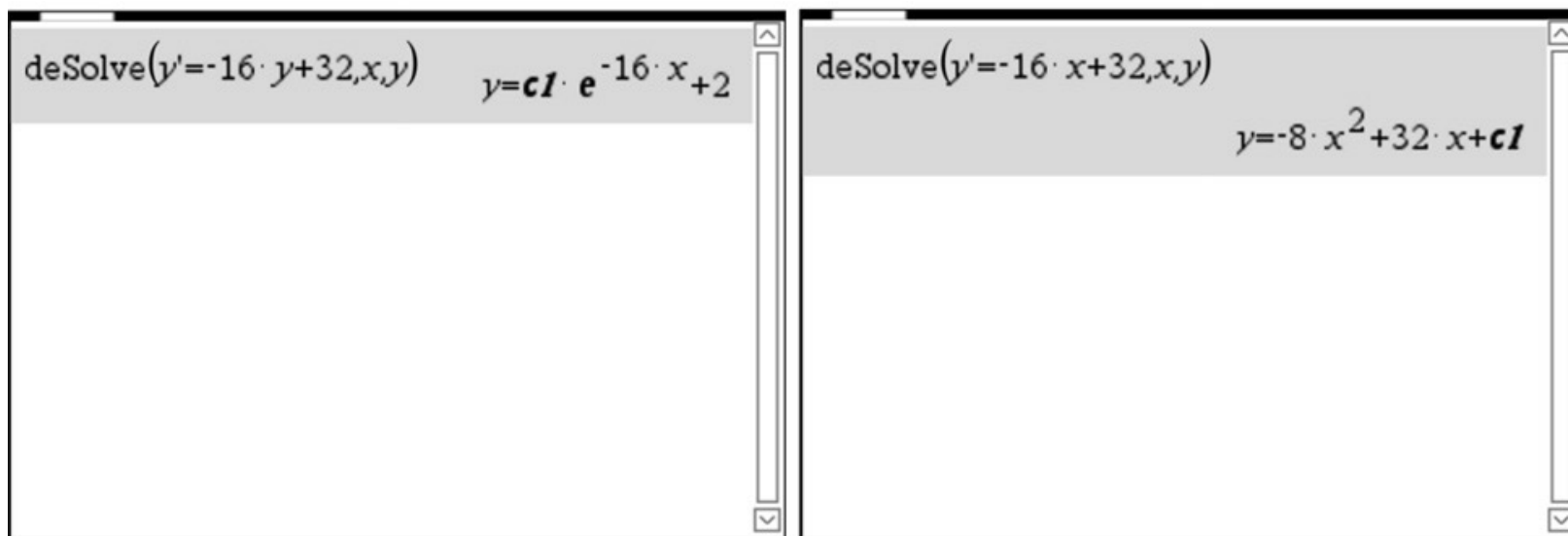
Exact form

✓ S



Solve, desolve, matematik eller black-boks betjening

- $dN/dt = -16N + 32$ med $N(10) = 1$, find et udtryk for $N(t)$



Jankvist, U., & Misfeldt, M. (2015). CAS-Induced Difficulties in Learning Mathematics? For the Learning of Mathematics, 35(1), 15-20.

Jankvist, U.T., Misfeldt, M. & Aguilar, M.S. What happens when CAS procedures are objectified?—the case of “solve” and “desolve”. *Educ Stud Math* **101**, 67–81 (2019). <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09888-5>

KØBENHAVNS UNIVERSITET Identitetsarbejde og CAS

Fig. 1 A 3rd year (grade 12) student's work with the linear equation: $220 - x = 208 - 0.7 \cdot x$. After a few attempts of solving this by hand, he gives up and turns to CAS instead, stating "[Expletive deleted] det, jeg solver" which translates into "[Expletive deleted] it, I'm solving"

$$\begin{array}{l}
 220 - x = 208 - (0.7 \cdot x) \\
 \text{måske} \\
 \frac{12 - x}{-0.7} = \frac{-0.7 \cdot x}{-0.7} \quad \text{[redacted] det} \\
 \text{jeg solver} \\
 -17 + \frac{x}{0.7} = x \quad x =
 \end{array}$$

Jankvist, U.T., Misfeldt, M. Old Frameworks—New Technologies. *Can. J. Sci. Math. Techn. Educ.* **21**, 441–455 (2021).

<https://doi.org/10.1007/s42330-021-00164-4>

Møllegaard Iversen, S., Misfeldt, M., & Jankvist, U. T. (2018). Instrumental mediations and students' identities. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 38(2), 133–156. <https://revue-rdm.com/2018/instrumental-mediations-and-students-identities/>

Opgave 2

En partikel bevæger sig i planen, så den til tidspunktet t befinder sig i punktet med koordinaterne

$f(t)$, hvor $f(t) = \begin{pmatrix} (t-1)^2 \\ t^2 - 2t \end{pmatrix}$. Bestem de tidspunkter t , for hvilke

- $f'(t) \cdot f''(t) = 0$
- $f'(t) \perp f''(t)$
- $f'(t) \parallel f''(t)$

A) Først differentier vi $f(x)$ to gange for at finde den afledte og dens dobbelte afledte. Vi anvender maple:

$$\begin{array}{ll}
 f(t) := [(t-1)^2, t^2 - 2t] & t \rightarrow [(t-1)^2, t^2 - 2t] \\
 \text{diff}(f(t), t) & [2t - 2, 2t - 2] \\
 g(t) := [2t - 2, 2t - 2] & t \rightarrow [2t - 2, 2t - 2] \\
 \text{diff}(g(t), t) & [2, 2] \\
 h(t) := [2, 2] & t \rightarrow [2, 2]
 \end{array}$$

Herefter kan vi løseligning, når prikproduktet af $g(t)$ og $h(t)$ skal blive nul.

$$\begin{array}{l}
 \begin{pmatrix} 2t-2 \\ 2t-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\
 2(2t-2) + 2(2t-2) = 0 \Leftrightarrow \\
 4t - 4 + 4t - 4 = 0 \quad \text{eller i maple} > t = \text{solve}\left(\left[\begin{pmatrix} 2t-2 \\ 2t-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0, t\right]\right) \quad t = 1 \\
 8t = 8 \\
 t = 1 \quad \checkmark
 \end{array}$$

Reificeringens onde cirkel

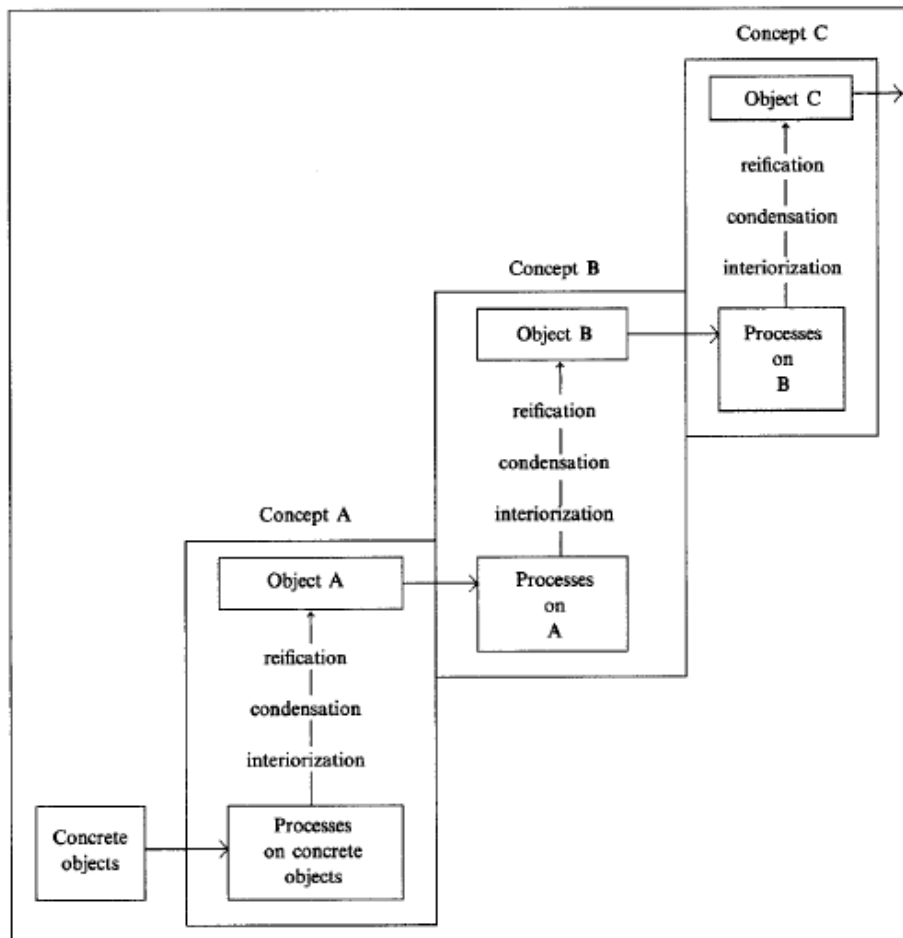
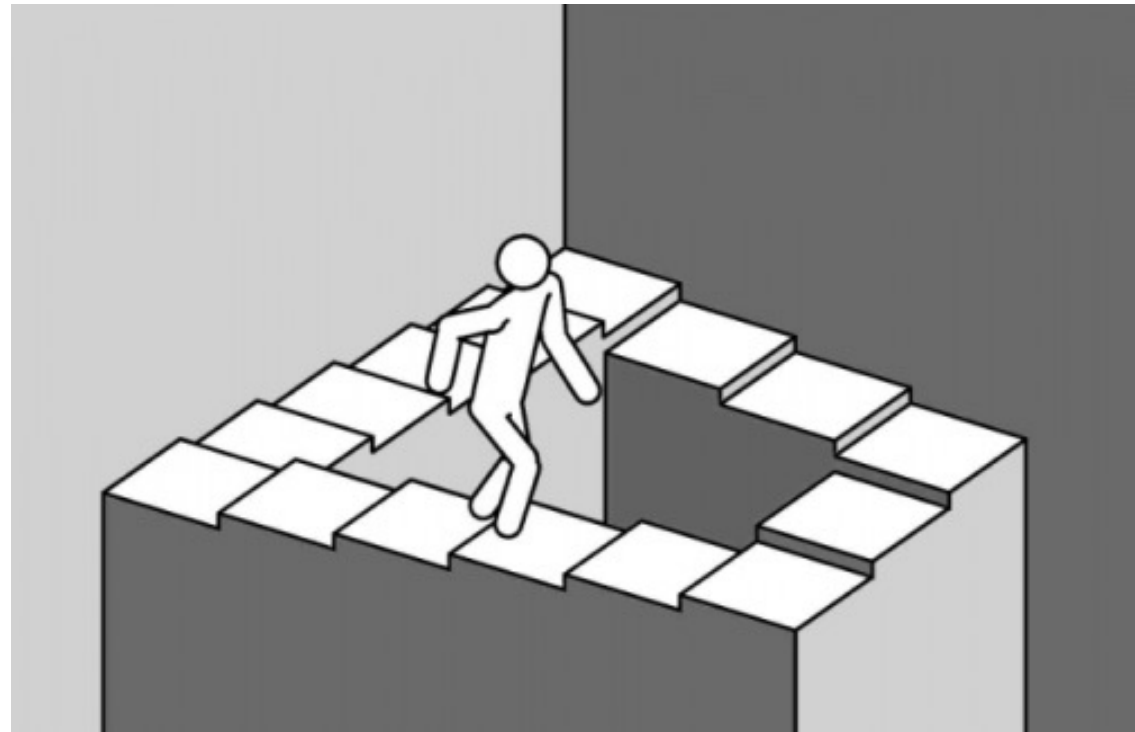


Fig. 4. General model of concept formation.

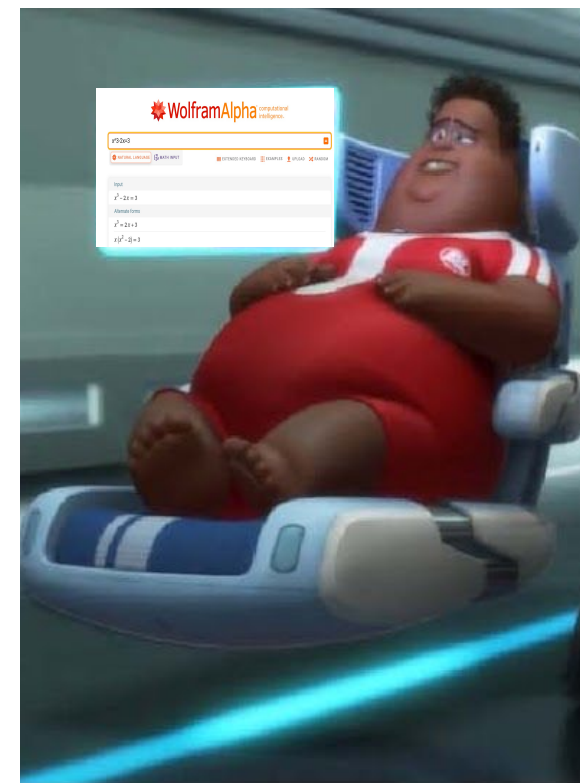


Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 1-36.

Den meningsløse digitalisering af matematik

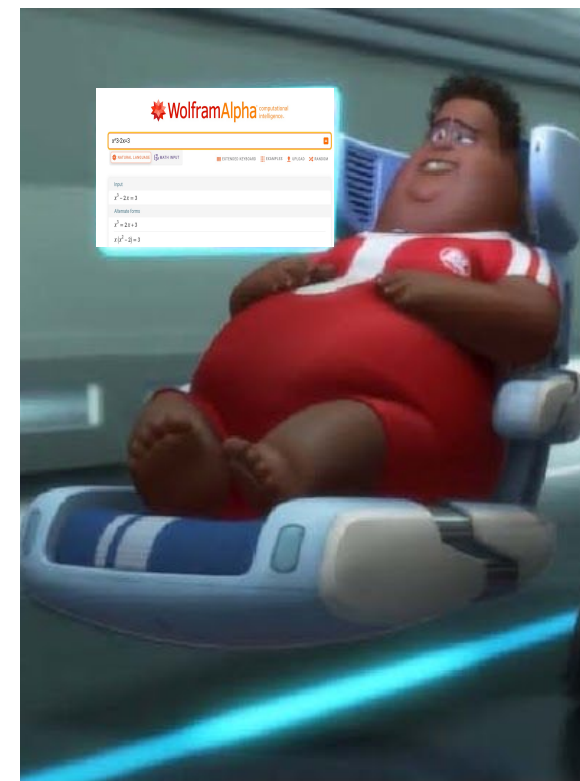
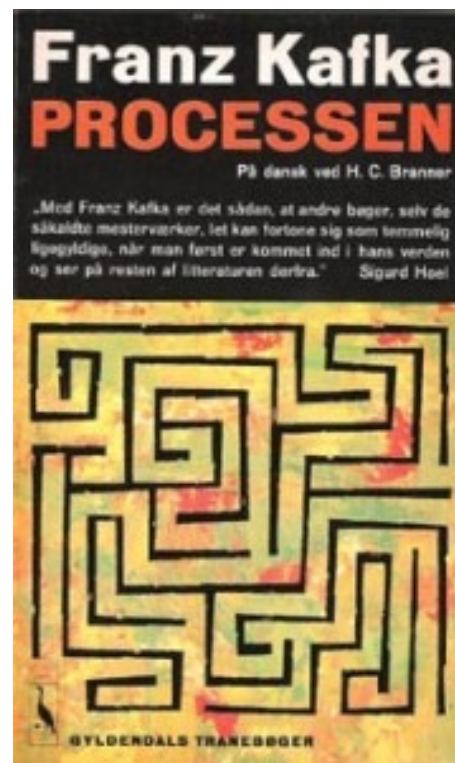
- Er kognitiv doven – mest bekymret om interface og instrumenter
- Mister grounding i virkeligheden og det menneskelige blik
- skubber black bokse rundt i et strukturalistisk tosseland

Find x



Den meningsløse digitalisering af matematik

- Er kognitiv doven – mest bekymret om interface og instrumenter
- Mister grounding i virkeligheden og det menneskelige blik
- skubber black bokse rundt i et strukturalistisk tosseland

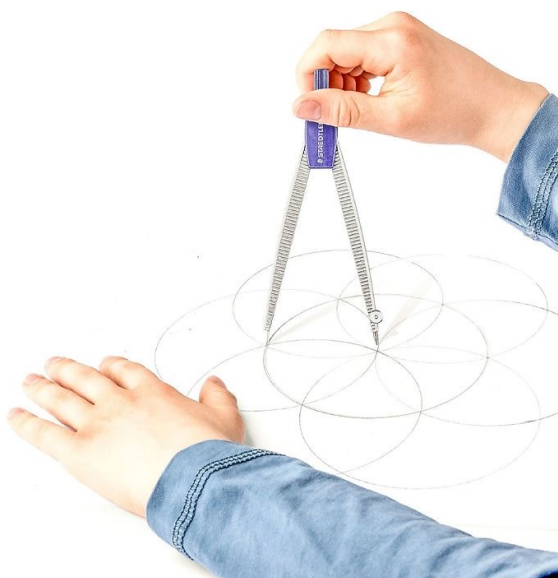


Svar på den kognitive singularitet ...

- Tid til refleksion – hvad vil det sige at være matematisk
 - Mit eget bud
- Udvikling af bedre pædagogisk teori og mere reflekteret praksis
 - Den instrumentelle tilgang til matematikundervisning
- Revidering af mål og indhold i matematik i lyset af digitale muligheder og udfordringer
 - Især snittet imellem Computational Thinking og Matematik
 - Men også andre meningsfulde tilgange til digital teknologi og matematik

Tid til refleksion – hvad vil det sige at være matematisk?

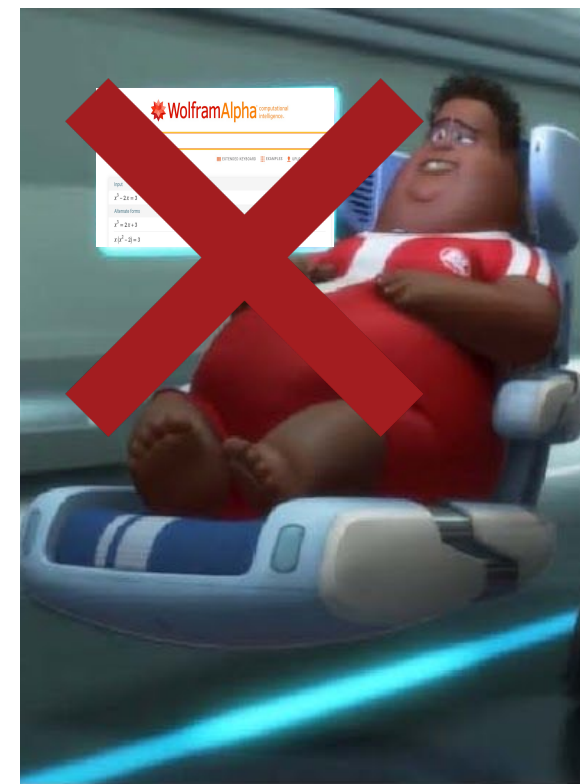
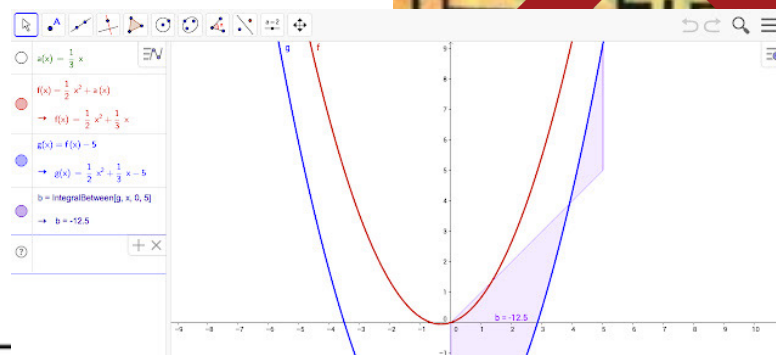
- At være kognitivt engageret
- At være kropsligt forankret
- At bruge værktøjer aktivt
- At undersøge og skabe



$$=-16 \cdot y + 32, x, y) \quad y = cI \cdot e^{-16 \cdot}$$



Find x



FRISÆTTENDE MATEMATIK? 7

MATEMATISK

FORESTILLINGSEVNE 13

MODELLER OG

PROBLEMER 23

MATEMATIK-

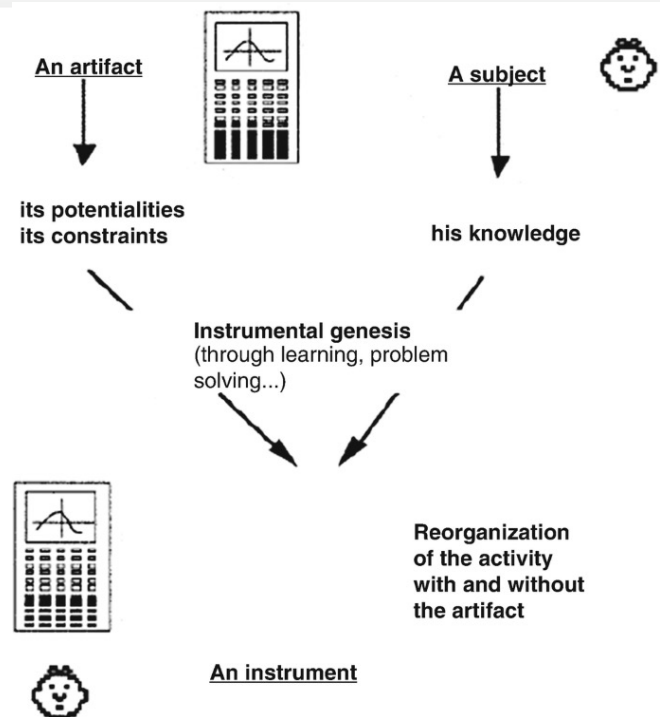
UNDERVISNING 33

DIGITAL MATEMATIK 49

ØKOLOGISK MATEMATIK 61

MORTEN ANBEFALER 69





Udvikling af bedre teori og praksis indenfor matematikundervisning

den instrumentelle tilgang til værktøjer i matematikundervisningen

Trouche, L. (2005). An Instrumental Approach to Mathematics Learning in Symbolic Calculator Environments. In: Guin, D., Ruthven, K., Trouche, L. (eds) The Didactical Challenge of Symbolic Calculators. Mathematics Education Library, vol 36. Springer, Boston, MA.
https://doi.org/10.1007/0-387-23435-7_7

Revidering af mål og indhold i matematik i lyset af digitale muligheder og udfordringer

- Matematisk Digitale Kompetencer
- Teknokritisk matematik
- Teknologiforståelse og matematik
 - Programmering og computational thinking i matematik

Computational thinking i matematik

(programming and computational thinking and mathematical digital competencies)

- Med Raimundo Elicer, Andreas Tamborg og Uffe Jankvist
- "Computational thinking" en del af curriculum i 25 europæiske lande ([Bocconi et al., 2022](#))
- Stor variation i konkrete beslutninger
- Typisk en eller anden relation til matematikfaget
- Skabe systematisk, empirisk indblik i implementeringsprocesser, der kan informere udvikling af CT i mat i DK

Hvad er "Computational thinking"?

the thought processes involved in formulating a problem and expressing its solution(s) in such a way that a computer — human or machine — can effectively carry out ([Wing, 2017](#)).

a way of thinking (thought process) for problem solving (Grover & Pea, 2018; Hazzan et al., 2020; Zhang & Nouri, 2019);

Computational thinking has eight core aspects: **Abstraction, Algorithm Design, Evaluation, Generalization, Iterative Improvement, Information Representation, Precise Communication, and Problem Decomposition**

(Komm et al., 2020)

Thinking computationally means being able to approach and solve problems efficiently based on the principles and methods of computer science (Arfé et al., 2020)

knowledge and understanding of concepts in Computer Science as well as for significant contribution to general-purpose problem-solving skills (Israel-Fishelson & Hershkovitz, 2020)

Computational approach (algorithmically) in a manner that results in solutions that can be reusable in different contexts ([Shute et al., 2017](#))

a way of thinking for developing solutions that can be processed and executed by a computational agent, namely a computer or robot – CT also embraces recognition of aspects of real-world problems suited to computational formulation (e.g., [Corradini et al., 2017](#))

Computational thinking is a problem-solving method that involves various techniques and strategies that can be implemented by digital systems (Australian Computing Academy, 2017)

Computational Thinking education comprises mental skills and practices for designing computations that get computers to do jobs for us, and explaining and interpreting the world as a complex of information processes (infosphere) ([Bocconi et al., 2022](#)).

... a thinking skill that can be transferred and applied in the process of solving real-world and significant problems in various contexts and disciplines through algorithmic methods (Israel-Fishelson et al., 2021; [Román-González et al., 2019](#); [Shute et al., 2017](#))

Computational thinking is a set of broadly applicable problem-solving skills, including abstraction, decomposition, pattern recognition, and algorithmic thinking, among others (Huang & Looi, 2020)

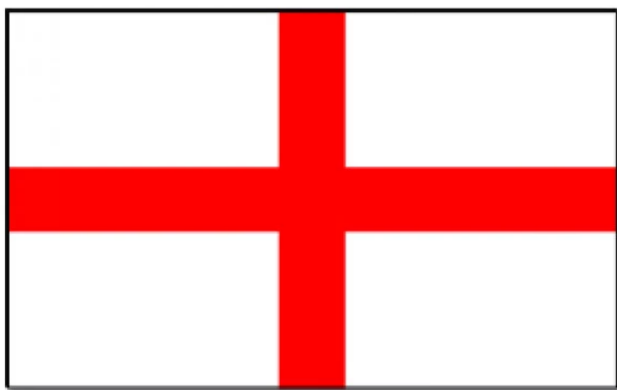
Hvilke udfordringer?

... og hvilke løsninger?

Tamborg, A. L. (2022). A solution to what? Aims and means of implementing informatics-related subjects in Sweden, Denmark, and England. *Acta Didactica Norden*.

Mål: Flere ansøgere til datalogi + øget konkurrenceevne

Middel: Nyt, selvstændigt computering fag med overvejende datalogisk indhold (2014)



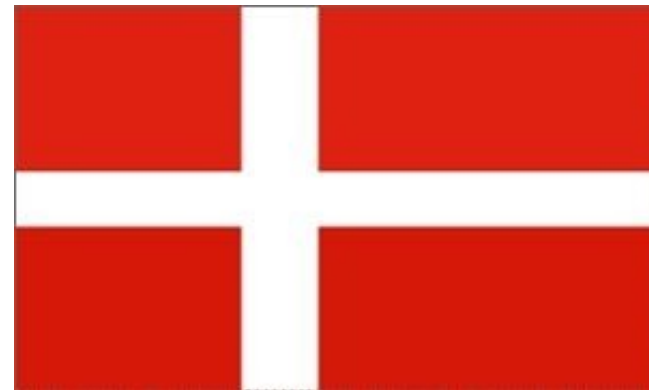
Mål: Lige digitale kompetencer på tværs af soc. øko faktorer

Middel: Revisioner af alle større fag, heriblandt implementering af programmering og algoritmer i matematik (2018)



Mål: Kritiske og skabende elever I et digitaliseret, demokratisk samfund

Middel: bredt **forsøgsfag**, hhv. i og som fag (2018-2021)



Indhold i curriculum

Computing curriculum:

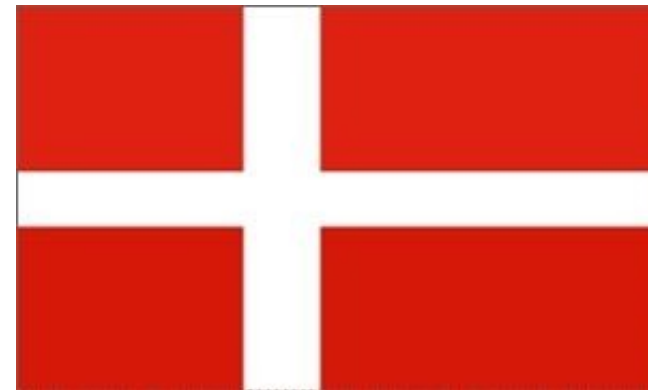
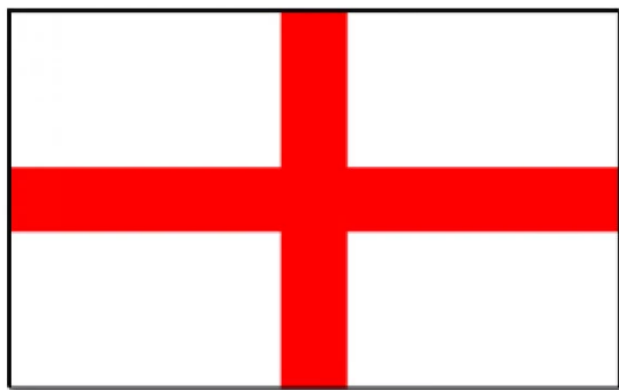
Forstå og anvende basale principper fra datalogi
Analysere problemer med datalogiske begreber
Evaluere nye og kendte teknologier

"Digital kompetans" i matematik:

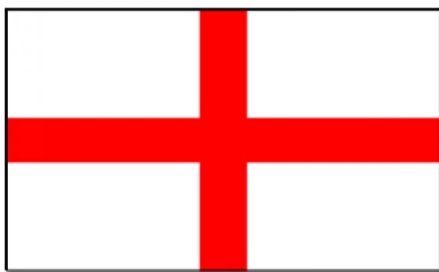
Programmering en del af algebra
Algoritmer en del af problemløsning
Simulationer en del af statistik

Teknologiforståelse (i mat):

Teknologisk handleevne
Digital design og designprocesser
Computational tænkning
Digital myndiggørelse



Relationen mellem matematik og CT i curricula

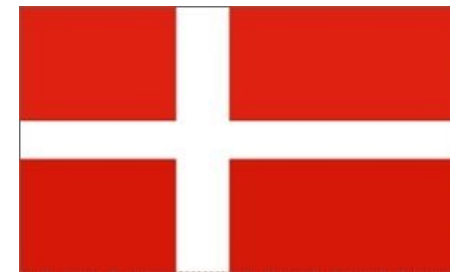


Computing

Matematik



	Matematik	
Digital kompetans	Statistik/simulering	Algebra/Programmering
	Dig.kom./mat	Dig.kom./mat



Matematik

- problemløsningskompetence
- Statistik og sandsynlighed
- Etc.

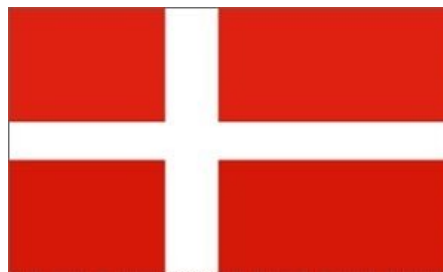
Teknologiforståelse

- digital myndiggørelse
- Computational thinking
- Etc.

Tendenser i tilgængelige UV materialer i SE/DK



- Små isolerede opgaver
- Indeholder konskevent mat + CT
- Fokus på at følge instruktioner

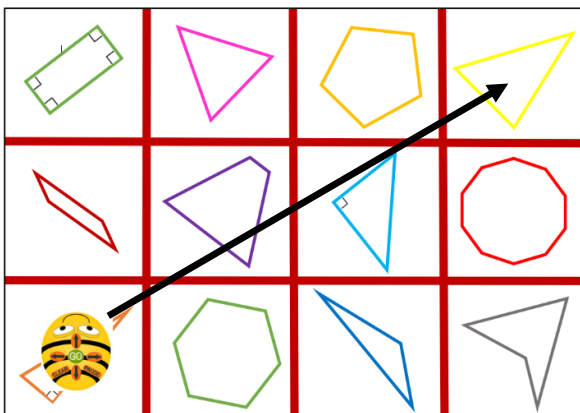


- Lange forløb (mange lektioner over flere uger)
- Delopgaver, der ofte **kun** behandler mat eller tekforståelse
- Ligevægt ml. opgaver, hvor elever følger instruktioner, programmerer og **forklarer** (mange plenumdrøftelser)

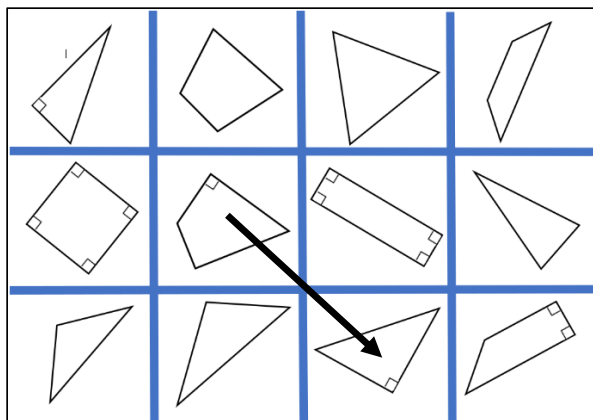
Elicer, R., Tamborg, A. L., Bråting, K., & Kilhamn, C. (forthcoming). *Comparing the integration of programming and computational thinking into Danish and Swedish elementary mathematics teaching resources.*

BeeBot og polygoner

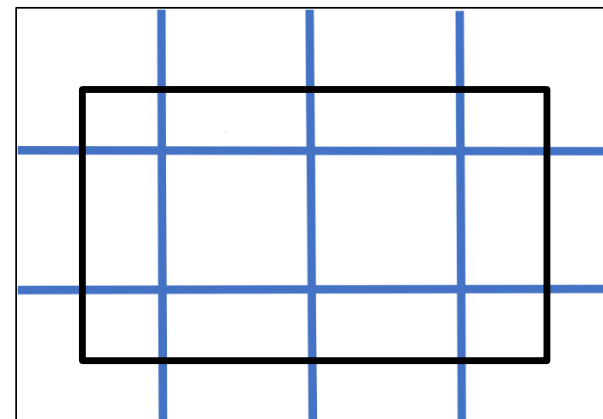
Hvordan kommer BeeBot-en hen til den gule trekant?



Hvilke forskellige egenskaber har de to figurer?



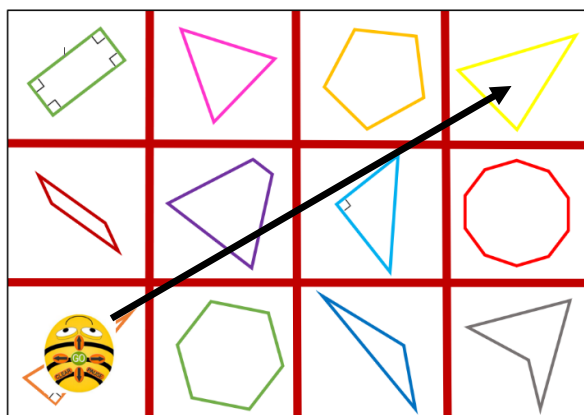
Lav flere forskellige algoritmer for et rektangel. Hvor stor et rektangel kan I lave?



På hvilken måde er disse opgaver forskellige?

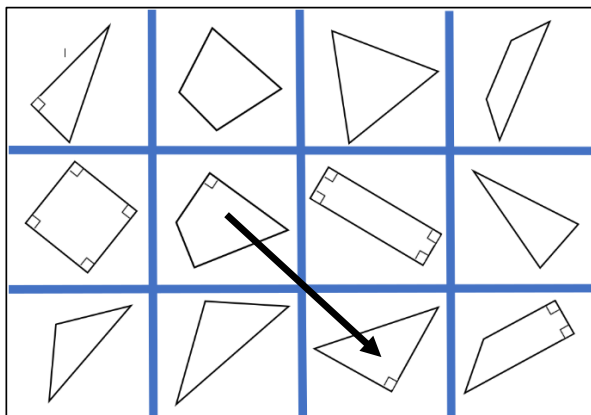
4. Resultater

Eksempel: Polygoners geometriske egenskaber



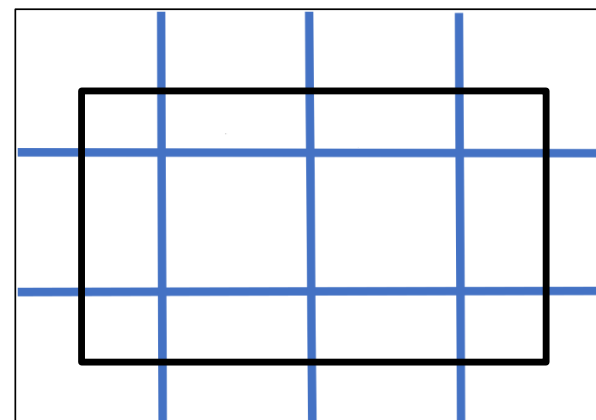
Mat: Konceptuel
PCT: Operationel

Matematik som kontekst



Mat: Operationel
PCT: Konceptuel

PCT som kontekst



Mat: Operationel
PCT: Operationel

Operationel integration

Analyse af opgaver

Matematik PCT	Fraværende	Konceptuel	Operationel
Fraværende		Ingen PCT	
Konceptuel	Ingen matematik	Konceptuel integration	PCT som kontekst
Operationel		Matematik som kontekst	Operationel integration

[Elicer & Tamborg \(2022\)](#). *Nature of the relations between programming and computational thinking and mathematics in Danish teaching resources.*

Hvad har vi lært fra projektet om programmering, computational thinking og matematikundervisning

Dyb integration er vigtigt men vanskeligt

- I materialer
- I undervisningspraksis

Samspillet mellem matematik og PCT er delvist formateret af politiske beslutninger

Computing

Matematik



	Matematik	
Digital kompetans	Statistik/ simulering	Algebra/ Program-mering
	Dig.kom./mat	Dig.kom./mat



Matematik - problemløsningskompetence - Statistik og sandsynlighed Etc.
Teknologiforståelse - digital myndiggørelse - Computational thinking Etc.



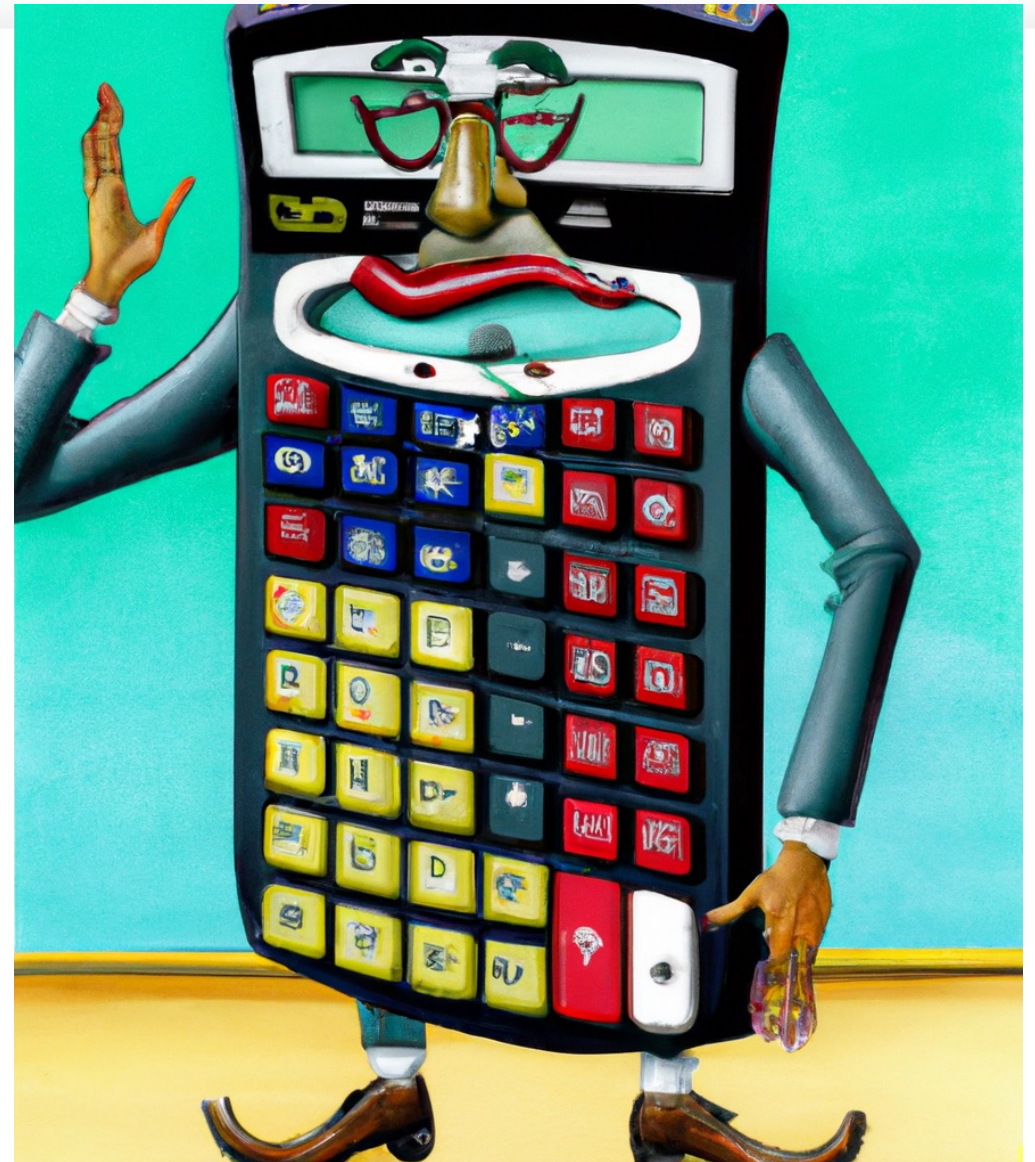
Post-digital matematikundervisning

Ikke blot digitale værktøjer

Dyb integration med
programmering og CT

Matematik som digitale
byggesten

Skjult matematik og teknokritisk
matematikundervisning



Det Post-Digitale perspektiv

- Holder op med at se digitalisering som noget særligt
 - Og derfor er digitalisering heller ikke et mål i sig selv
- Men anerkender samtidigt store transformative konsekvenser af digitalisering
 - Og derfor kan vi heller ikke vælge digitalisering fra
- Økologisk og situeret forståelse af digitale indflydelser på læring
 - Digitalisering er:
 - konkret – noget kommunikeres eller behandles digitalt
 - Situeret – det foregår et sted (kontekst)
 - Hænger systemisk sammen med alt muligt andet

Post digital – udfordringer med begrebet

- Begrebet ønsker selv at "gå over"/ blive unødvendigt – vi skulle egentlig bare tale om matematik
- Men meget uddannelsesudvikling og praksis ser sig ikke en gang som digitalt – derfor slet ikke post-digitalt
- $Human \cap Technology = \emptyset$ er standard forestilling
- Det digital "push" er således nok nødvendigt, selvom det er fejlbehæftet – fejlene er typisk at se det digitale som en positiv men ekstern udvidelse af læringsrummet, eller at se det digitale som negativt

Forståelser af det post-digitale (Knox 2019, Jandric et al 2018)

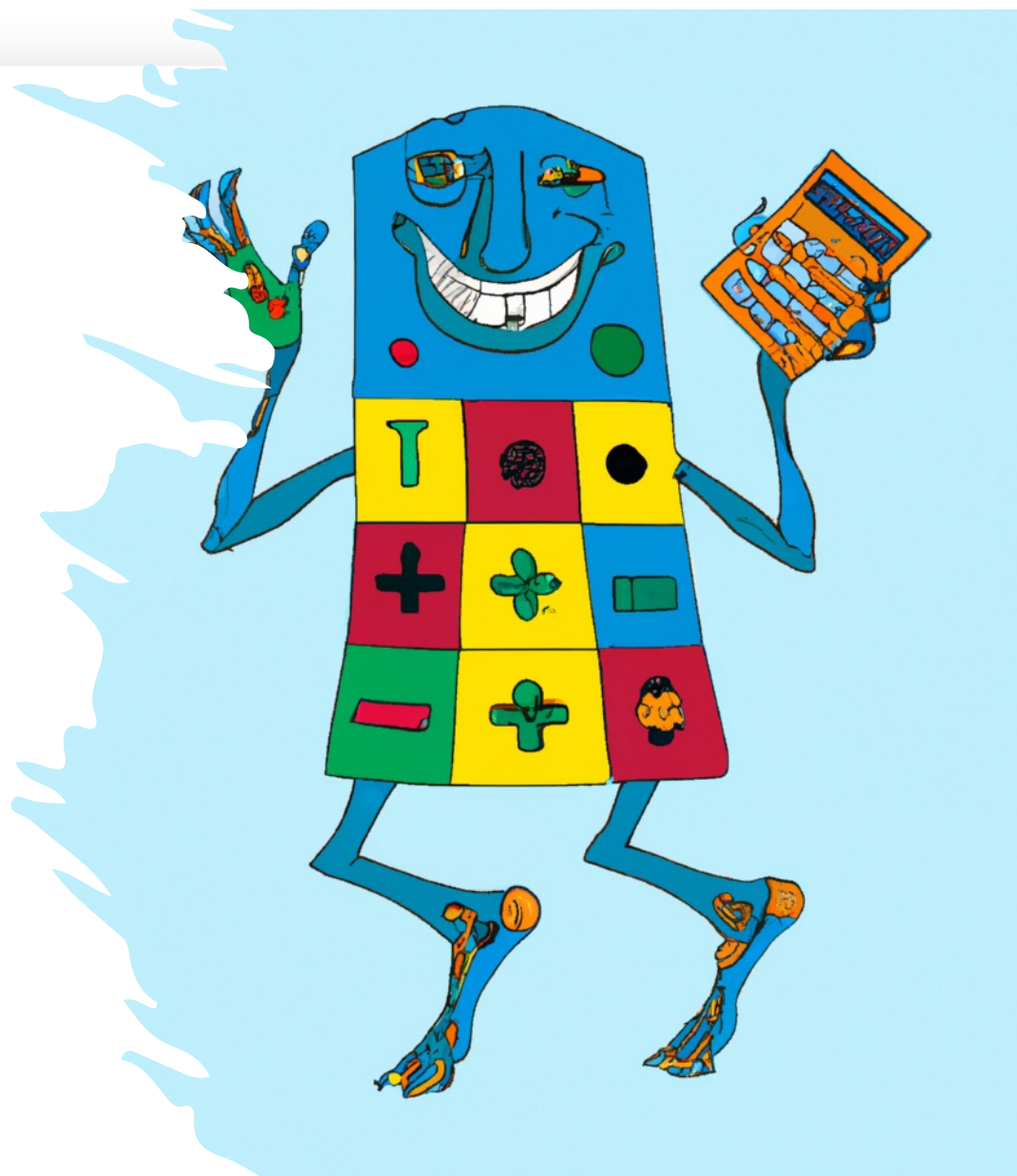
- Implementering: "efter CAS" hvad er de nye stabile konfigurationer. Post-digital = nye digitale praksisser
- Straight forward historisk: "Efter" det digitale. Det digitale som en særlig periode i historien hvor vi var meget optagede af digitale gadgets og systemer. Post-digital = vi er videre
- "Post-isme": som i postmodernisme, posthumanisme, postkolonialisme. Udfordring af de store myter og kategorier som vi tidligere har naturaliseret. Post-digital = kritisk forståelse af digitalisering
- "Post-punk": reflektiv og ironisk videreførelse der går ud over genrekonventioner. Post-digital = reflektiv videreførelse af digitale praksisser

De store myter og kategorier

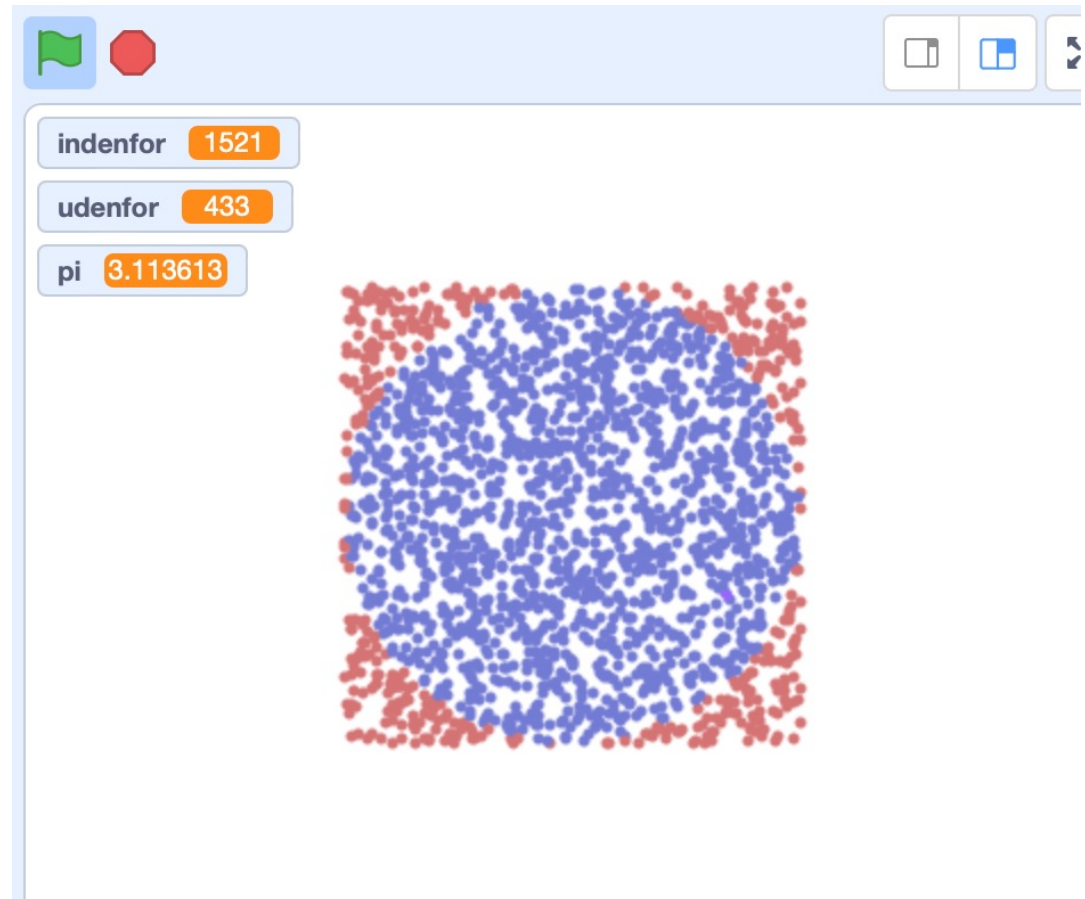
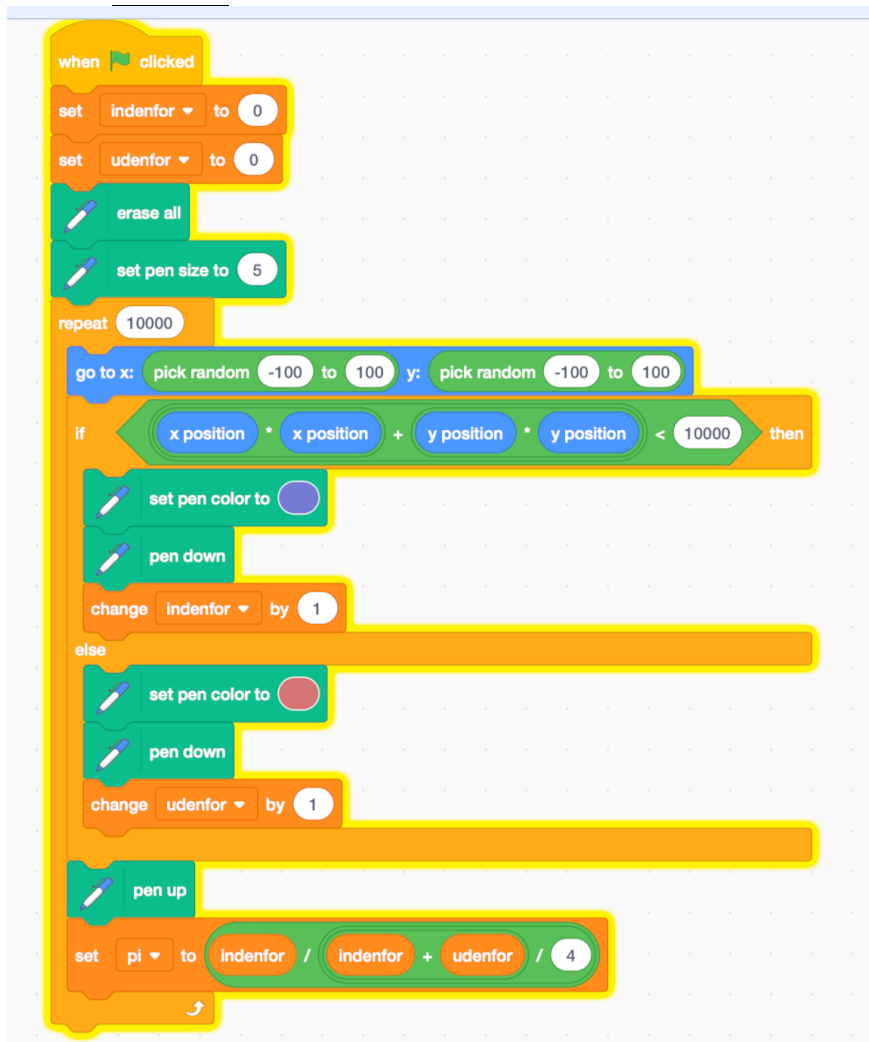
- Digital matematik som værende i "en anden kategori" end almindelig matematik og dermed noget man kan være for eller imod.
- Digitale værktøjer til at 1) lære med og til at 2) løse med
- Matematiske værktøjer som værende "bare værktøjer" og uden indflydelse på begrebsforståelse og indhold (dette gælder både digitale og analoge værktøjer)
- Informatik er det nye matematik 😊
- Find selv på flere

Frem mod post-digital matematik med mening

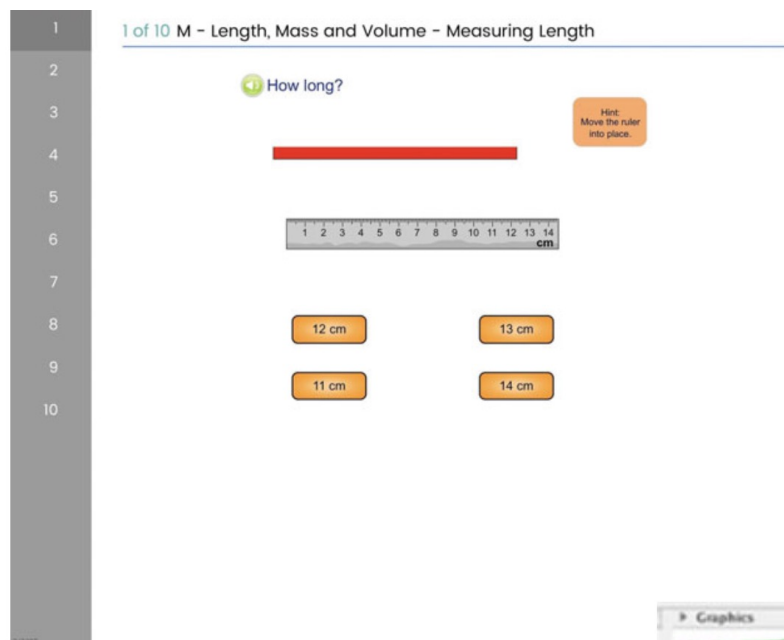
- Dyb integration med programmering og CT
- Embodied og undersøgende tilgange støttet af teknologi
- Matematik som digitale byggesten
- Skjult matematik og teknokritisk matematikundervisning



Dyb integration



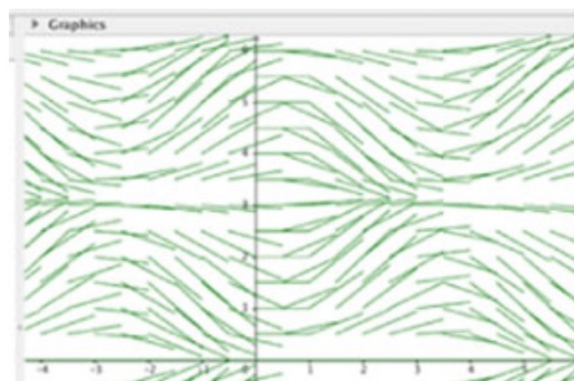
Embodied og undersøgende tilgange til matematik med IT



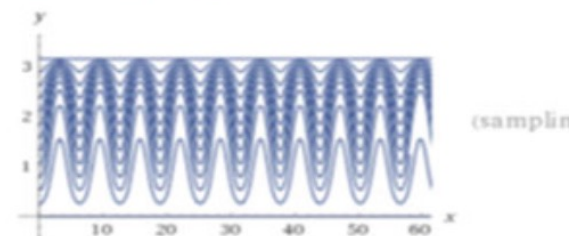
Mathlets

Bygge undersøgelser med CAS,
programmering og DGS

Misfeldt, M., Thomas Jankvist, U., & Geraniou, E. (2023). An embodied cognition view on the KOM framework's aids and tools competency in relation to digital technologies. I U. T. Jankvist, & E. Geraniou (red.), *Mathematical Competencies in the Digital Era* (s. 197-216). Springer. *Mathematics Education in the Digital Era MEDE* <https://doi.org/10.1007/978-3-031-10141-0>



Sample solution family:



Matematik som digitale byggesten

- CT tilbyder en meget konstruktiv og direkte måde at anvende matematik på



Anna (elev)

Hvem vil med hjem og se film hos mig i aften

12

4

Karen (lærer)

Vi skal på udflugt fredag (til Zoo) – husk madpakke og drikkedunk. Der er en besked på intra til jeres forældre, men det er vigtigt i kommer på skolen senest 8.15.

2

Tommy (elev)

jeg kan ikke finde min lommeregner, nogen der har set den?

1

Trine (lærer)

idræt aflyst de næste to uger. Der er håndværkere i salen. Tag jeres grammatiks med i stedet

1

Sigurd (elev)

Tjekk mine billeder fra Mons klint i sidste uge (der er både rav og kridt og også nogen af klassen)

19

2

Berit (elev)

hvem vil være med til at lave et band og øve til juleafslutningen

2

Mads (lærer)

ny kageliste til klassens time er på intra. Husk bedste kage kåres til juleafslutningen.

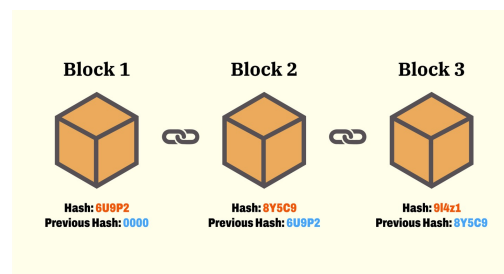
12

Sebastian (elev)

Er der nogen der vil mødes og lave biologirapport efter skole i næste uge

6

4



valutakurser

Valutaomregner

 USD

 DKK



Populære

	Schweiziske franc	CHF	-0.3% ▼	752,42
	Euro	EUR	-0.0% ▼	744,29
	Britiske pund	GBP	-0.3% ▼	844,44
	Norske kroner	NOK	0.1% ▲	67,94
	Svenske kroner	SEK	-0.4% ▼	67,31
	Amerikanske dollar	USD	0.2% ▲	701,10

Skjult matematik og teknokritisk matematikundervisning

Budskaber

- Dyb integration mellem CT og mat er vigtig men svær
- Embodied og undersøgende tilgange
- Reflekter over myter og kategoriseringer omkring det digitale
- Gå "post-punk" på digital matematikundervisning (reflekteret ikke dogmatisk videreførelse af digital matematikundervisning)
- Tænk over hvad det vil sige at være matematisk!

Refs

- Elicer & Tamborg (2022). Nature of the relations between programming and computational thinking and mathematics in Danish teaching resources.
- Knox, J. (2019). What does the ‘postdigital’ mean for education? Three critical perspectives on the digital, with implications for educational research and practice. *Postdigital Science and Education*, 1(2), 357-370.
- Misfeldt, M. (2022). *Matematik med mening* (Vol. 22). Aarhus Universitetsforlag.
- Trouche, L. (2005). An Instrumental Approach to Mathematics Learning in Symbolic Calculator Environments. In: Guin, D., Ruthven, K., Trouche, L. (eds) *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators*. Mathematics Education Library, vol 36. Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/0-387-23435-7_7
- Jankvist, U.T., Misfeldt, M. Old Frameworks—New Technologies. *Can. J. Sci. Math. Techn. Educ.* 21, 441–455 (2021). <https://doi.org/10.1007/s42330-021-00164-4>
- Jankvist, U., & Misfeldt, M. (2015). CAS-Induced Difficulties in Learning Mathematics? For the Learning of Mathematics, 35(1), 15-20.
- Jankvist, U.T., Misfeldt, M. & Aguilar, M.S. What happens when CAS procedures are objectified?—the case of “solve” and “desolve”. *Educ Stud Math* 101, 67–81 (2019). <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09888-5>
- Møllegaard Iversen, S., Misfeldt, M., & Jankvist, U. T. (2018). Instrumental mediations and students’ identities. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 38(2), 133–156. <https://revue-rdm.com/2018/instrumental-mediations-and-students-identities/>