Elevers læringsvanskeligheder i de gymnasiale uddannelser - hvordan kan de afdækkes og afhjælpes?

Uffe Thomas Jankvist

DPU, Aarhus Universitet

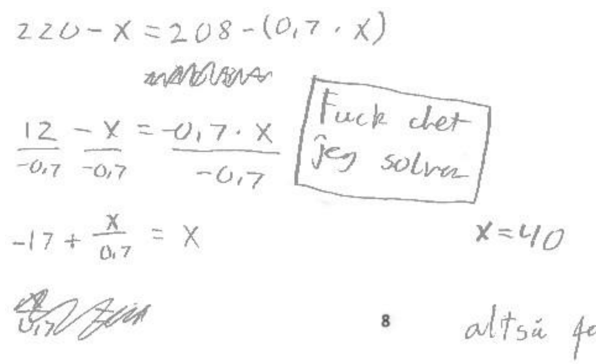
1

Indhold

- Lidt spredte eksempler på gymnasieelevers vanskeligheder i matematik
- Om RUCs hedengangne matematikvejlederuddannelse til gymnasiet
- Elev-cases fra matematikvejlederuddannelsen, inkl. mulige fortolkning af elevers vanskeligheder iflg. forskningslitteraturen
- Lidt over overgangen fra grundskole til gymnasium
- Én sidste case: ”Det vanskelige 0”

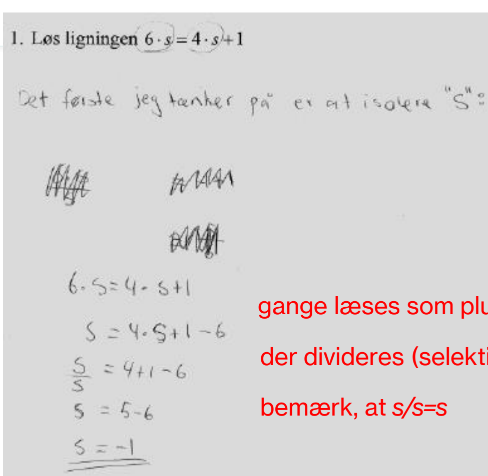
2

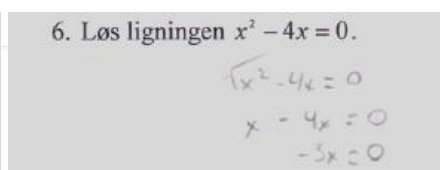
Eksempler på vanskelig-heder



3

Ligningsløsning





det at tage kvadratrod bliver til et 'kirurgisk' indgreb der kan udføres på udvalgte besværlige led...

gange læses som plus...

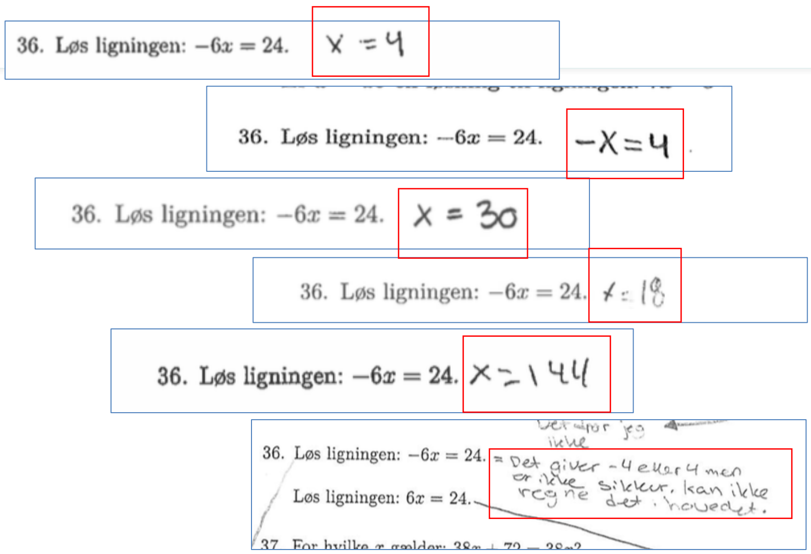
der divideres (selektivt) igennem med s...

bemærk, at *s/s=s*

- (Schou & Pihl, 2014)

4

Negative tal, fortegn og ...



5

Ligningsløsning og talbegreb

- Problemer med variabel-begreb:
  - ”Jeg kan ikke sige 3x-1, fordi jeg ikke kan trække 1 fra x. Man kan ikke trække et tal fra et bogstav.”
- Elev om 24/6:
  - ”Det ved jeg ikke, når det er så store tal.”
- (Christensen & Mortensen, 2014)
- Observation: en betydelig snublesten for løsning af ligninger kan være manglende udvikling af talbegrebet!

Om at tage ‘ordet på ordet’

En opgave fra ‘Detektionstest 3’ givet til 2000+ gymnasieelever i DK

- Hans kan gå fra Roskilde Station til Roskilde Domkirke på 6 minutter. Grethe skal bruge 8 minutter.
- Hvor lang tid tager det, hvis de følges ad?
- Begrund dit svar.

7

Eksempler på svar

- ”6 min., hvis Hans tager Grethe på ryggen. Dog kan det tage kortere tid, hvis de løber.”
- ”6 min. fordi Hans viser Grethe smutvejene.”

- ”7 minutter” [oftest forekommende fejlsvar!]
- ”… men kun hvis Hans er god til at motivere Grethe.”

- ”Mindst 8 min., afhængigt af om Hans bor på vej til Domkirken, eller om Grethe skal gå en omvej, eller om de mødes på halvvejen.”

- "Da jeg antager, at dette er i rask gang ud fra udtrykket "kan" vil jeg formode, at de går distancen på omkring 9-10 minutter. Da de undervejs højst sandsynlig kommunikerer og andet der sløver hastigheden grundet menneskets ringe evne til at multitaske.”
- ”14 min. – lægger 8+6 sammen.”

8

En gammel PISA-opgave

Et andet spørgsmål fra 'Detektionstest 3':

- Et pizzeria serverer to runde frokostpizzaer af samme slags og tykkelse, men i forskellig størrelse. Den mindste har en diameter på 30 cm og koster 30 kr. Den største har en diameter på 40 cm og koster 40 kr.
- Hvilken pizza giver mest for pengene?
- Vis, hvordan du kom frem til dit resultat.

9

Eksempler på svar

- ”Man får 1 cm pizza for 1 kr.” [oftest forekommende fejlsvar!]
- ”Ingen af dem giver mest for pengene, da man betaler 1 kr. per 1 cm i diameter pizza for dem begge.”
- ”Der er ingen forskel? En pizza koster 10 kr pr diameter. Hvis du skal have den til 40 kr, kan det godt være du betaler 10 kr mere end den pizza til 30 kr, men du får så også 10 diameter mere pizza ☺”

10

Matematik-vejleder-uddannelsen til gymnasiet

11

Matematikvejledere i gymnasiet

- Fra begyndelsen var ideen at disse skulle arbejde direkte med elever

- At kunne **identificere** (detektere) elever med læringsvanskeligheder
- At kunne **diagnosticere** hvori vanskelighederne består
- At kunne **intervenere** i forhold til den enkelte elevs læringsvanskeligheder

- Heri er også et element af samarbejdskompetence i forhold til de kollegaer, som underviser de pågældende elever i matematik og naturfag

12

12

Selve uddannelsen

- Udviklet af Mogens Niss og Uffe Jankvist
- Implementeret af Mogens Niss, Uffe Jankvist, Morten Blomhøj, Sif Skjoldager og Jesper Schmidt
- 30 ECTS over tre semestre fordelt på kurser og del-projekter
- Indledende og afsluttende internatkurser
- Litteraturlister til hvert semester
- Empiridelen foregik ude på gymnasierne
- Afsluttende eksamen med udgangspunkt i en samlet projektrapport

13

13

Temaer for de 3 delprojekter

1. *Begreber og begrebsdannelse i matematik*
2. *Ræsonnementer og bevisførelse i matematik*
3. *Modeller og modellering i matematik*

- Man kunne selvfølgelig have skåret kagen anderledes…
- Men der var en mening med 'galskaben'…

14

14

En balancegang mellem teori og praksis

- Uddannelsen kunne nødvendigvis ikke baseres på underviseres egne erfaringer og intuition alene (for så ville problemet med elevers læringsvanskeligheder jo allerede være løst)
- Der måtte nødvendigvis erfaringer fra forskning til
- Men det var også klart at disse forskningsbaserede erfaringer skulle kunne omsættes i praksis
- Delprojekterne omfattede derfor såvel en teoretisk som en praktisk/empirisk del

15

15

Den teoretiske del

- Litteraturlisten var tænkt som en indføring i den matematikdidaktiske litteratur til det pågældende semesters tema
- Selv om temaet var fastlagt skulle deltagerne selv vælge et område som de ville fokusere på, f.eks. elevers problemer med begrebsdannelse i
  - differentialregning, sandsynlighedsregning, geometri eller algebra, etc.
- Afhængig af valget ville deltagerne få brug for mere specifik litteratur også – og det hjalp vi med at identificere

16

16

Den praktiske/empiriske del

- Der skulle i hvert af de tre delprojekter indgå en empirisk dimension
- Dvs. at deltagerne ude på gymnasierne skulle finde 1-2 elever som havde læringsvanskeligheder i matematik
- Det skulle udredes hvori disse vanskelighederne for den enkelte elev bestod
- Og der skulle igangsættes et arbejde med at sætte ind overfor disse vanskeligheder

17

17

Hvad uddannelsen *ikke* tilbød

- Der var ikke tale om en 'posefuld tips og tricks' som deltagerne nu kunne gå ud og anvende i praksis
- Ej heller var der tale om at dette satte en stopper for samtlige læringsvanskeligheder i matematik

- Det var i uddannelsen et fokus på er de elever som prøvede og gerne ville lære matematik, men for hvem det bare ikke skete – i modsætning til dem som overhovedet ikke var motiverede

18

18

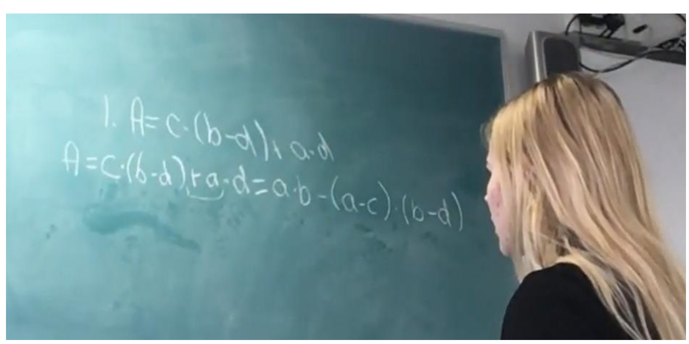
Hvad uddannelsen så tilbød

- At gøre de kommende matematikvejledere i stand til at **identificere, diagnosticere** og **intervenere** overfor elever med læringsvanskeligheder i matematik
- Udarbejdede og afprøvede **detektionstests** af Niss og Jankvist, som kan indikere 'hvor hunden ligger begravet' (én til hvert tema)
- Der blev udstukket rammer for et **netværk** for matematikvejledere, hvor de kunne sparre med hinanden i deres fremtidige arbejde – dette netværk (F3M) er stadig aktivt og mødes årligt
- Der blev fra 2012 til 2021 uddannet små hundrede matematikvejledere i alt

19

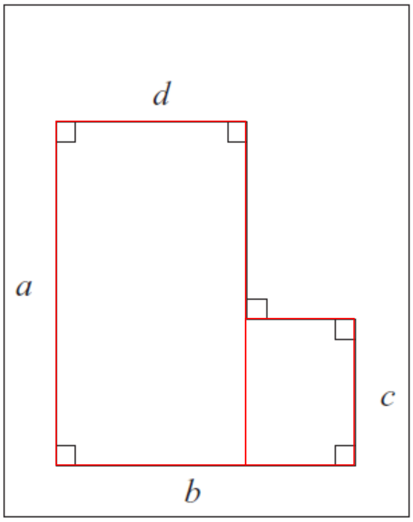
19

Elev-cases



20

Dorethe fra Odense



Skitse 3

- **Opgave 3**
- På skitse 3 er siderne angivet med variabelnavnene a,b,c og d.
- Tre af de fire formler herunder kan bruges til at beregne arealet af figuren i skitse 3. Hvilke tre er der tale om?

1. $A = c \cdot (b - d) + a \cdot d$
2. $A = a \cdot b - (a - c) \cdot (b - d)$
3. $A = a \cdot b - c \cdot (b - d)$
4. $A = d \cdot (a - c) + b \cdot c$

21

21

Skift imellem matematiske repræsentationer

- Iflg. Duval (2006) så handler matematisk forståelse i høj grad om at kunne skifte mellem forskellige matematiske repræsentationer
- Dorethe bemestrer faktisk dette! (Lade, 2019)

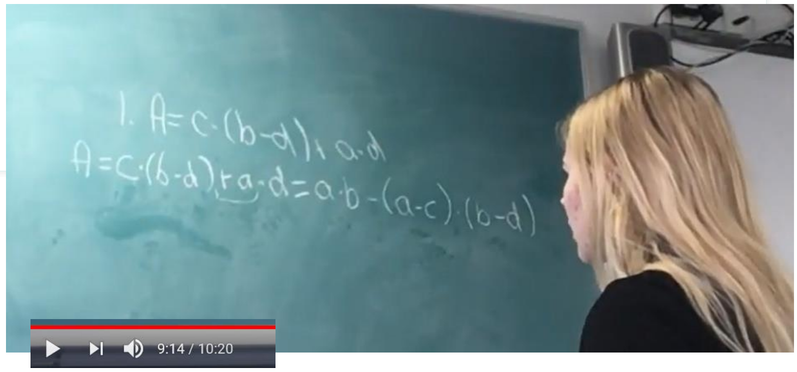
	Diskursive registre	Ikke-diskursive registre
Multifunktionelle registre (kan normalt ikke algoritmiseres)	Benytter hovedsagelig naturligt sprog, talt eller skrevet	Omfatter typisk afbildende tegninger, skitser, figurer, mønstre
Monofunktionelle registre (kan ofte algoritmiseres)	Refererer til et symbolholdigt og – forbrugende system	Diagrammer, grafer o.lign., underlagt konstruktionsregler

22

22

Men…

- **Opgave 4**
- Kan man omdanne formel 1 til formel 2?
- Begrund dit svar.



1. $A=c\cdot(b-d)+a\cdot d$
2. $A=a\cdot b-(a-c)\cdot(b-d)$

- Vores elev kan sagtens tænke matematisk
- Hun besidder repræsentationskompetence
- Men manglende symbol- og formalisme-kompetence spænder *igen og igen* ben for hendes matematiske ræsonnementer

23

23

Julie fra Ørestad

- Interview om Julies og en klassekammerats svar på spørgsmål i Detektionstest 1

- **Vejleder**: “Når jeg skriver $a^2=2a$, er det så rigtigt?”
- **Julie**: “Ja, det vil jeg da mene.
- **Julie**: “… det er en anden måde at skrive det på”

- Vejlederen beder dem om at forsøge sig med tallet 2 (det går godt). Og med tallet 3 (hov) – de ændrer deres svar til “nej”
- Vejlederen spørger dem nu igen om a=2, og efter at det er gået op for eleverne at udtrykket holder for a=2 men ikke for a=3 tænker de længe:

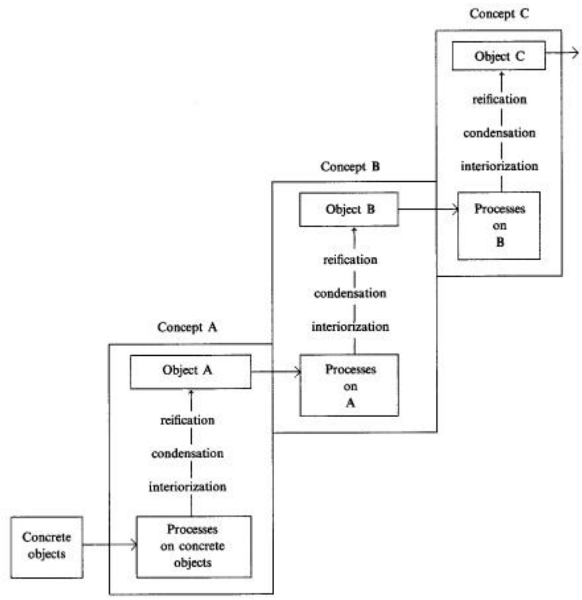
- **Julie**: “Det er kun når a er lig med potensen [i dette tilfælde 2]…”
- [senere] **Julie**: ”Nå nej, det er når man differentierer…”

24

24

Mulige fortolkninger

- Julie ser aldrig 2. gradsligningen: $a^2=2a$
- Et ikke-reificeret ligningsbegreb (Sfard, 1991)
- Ej heller et reificeret begreb om hvad det vil sige *at være løsning* til en ligning – og *hvor mange løsninger* forskellige typer af ligninger har
- Måske stikker det endnu dybere? Og handler om et ikke-reificeret talbegreb…

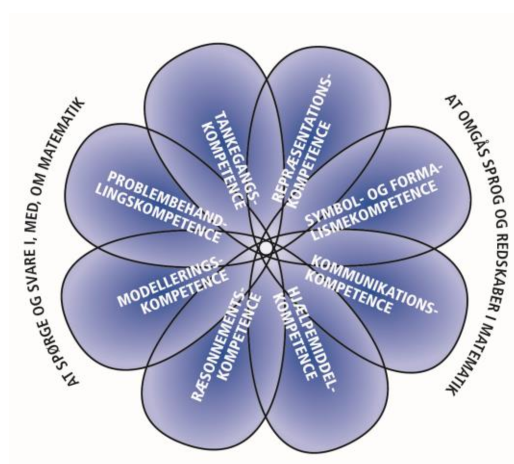


25

25

Mulige fortolkninger (fort)

- En ikke helt udviklet symbol- og formalismekompetence (Niss & Jensen, 2002) – måske anderledes hvis der havde stået ‘*x*’
- Julie synes at opfatte matematik som et sammensurium af usammenhængende regler, der ikke nødvendigvis har noget med hinanden at gøre
- Hun synes derfor overladt til at ”gætte” og leder efter sammenhænge steder, hvor der ingen er…



26

26

Julies forestillinger om matematik

- **Julie**: ”Jeg har altid haft den holdning til matematik, at der er bare nogle regler, man skal følge, og sådan er det.”

- **Vejleder**: ”Er det matematiklærerne, der har fundet på reglerne?”

- **Julie**: ”Nej, det er nogle filosoffer. Er det ikke det, de hedder?”

- Klaus Bruun Pedersen & Anders Torp (2016). Begreb om funktioner. Kapitel 3 i: M. Niss & U. T. Jankvist, *Fra snublesten til byggesten*. Frederiksberg: Frydenlund.

27

27

”Frokost-sessioner”

- Julie var en 3. års elev med matematik på højniveau(!) og hun lå under dumpegrænsen i begyndelsen af 3.g

- En fokuseret matematikvejledning, bl.a. i frokostpauser – som forsøgte at bringe hende væk fra at ”huske udenad” og i stedet ”udlede” – førte hende til at få en beståět karakter i matematik ved studentereksamen

28

28

Rikke fra Roskilde

- I forbindelse med et interventionsforløb om matematisk modellering, bemærkede matematik-vejlederne, at eleven Rikke ikke stolede på sin egen matematiske intuition, men i stedet ofte lod sig overbevise af andre elever – som ikke altid havde ret
- Et efterfølgende interview blotlagde en interessant forestilling som Rikke havde om faget matematik
- Vi kommer ind på et sted, hvor der tales om Biotek…

29

29

Rikkes forestillinger om matematik

- **Vejleder**: ”Men Biotek er jo også vigtigt og på A-niveau.”
- **Rikke**: ”Ja, det ved jeg godt men, men i Biotek der sidder vi og arbejder sammen om opgaver, som er ret svære og som vi ikke har prøvet før, hvorimod vi har haft matematik siden altid. Biotek er nyt på en anden måde, der har vi ikke den samme baggrundsviden som i matematik. I Biotek er det hele bare nyt, og vi lærer det alle sammen fra den samme ’start’ hvis man kan sige det sådan. ”

30

30

Rikkes (fort)

- **Vejleder**: ”Er det fordi du føler at det er værre i matematik, fordi det burde man kunne fordi man har haft matematik i så mange år.”
- **Rikke**: ”Ja, det tror jeg, og så bliver jeg usikker, hvis der nu er noget jeg ikke kan finde ud af, så tænker jeg ‘fuck’ det går ud over min karakter eller et eller andet. Jeg føler mig dum.”
- **Vejleder**: ”Der er et større forventningspres på en eller anden måde?”
- **Rikke**: ”Ja, lidt synes jeg. Det virker som om der er en lidt større forventninger om, at man kan alle sine ting i matematik, synes jeg.”
- **Vejleder**: ”Er det forventninger fra lærerens side, klassekammeraterne eller fra bogens side? Hvor kommer det fra? ”
- **Rikke**: ”Det hele, sådan – nu går man i gymnasiet og så *skal* man kunne det.”

Hvad er matematikforestillinger/-beliefs?

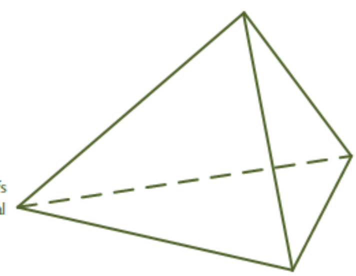
- Philipp (2007, p. 258) describes beliefs as “lenses through which one looks when interpreting the world”:

- “Psychologically held understandings, premises, or propositions about the world that are thought to be true.
- Beliefs are more cognitive, are felt less intensely, and are harder to change than attitudes.
- Beliefs might be thought of as lenses that affect one’s view of some aspect of the world or as dispositions toward action.”

(Philipp, NCTM 2nd Handbook, 2007, s. 259)

En opdeling af beliefs

- Beliefs om matematikuddannelse
  - Om matematik som undervisningsfag; om læring, forståelse, problemløsning; om undervisning i faget; ...
- Beliefs om selvet
  - Om tiltro til egne evner; om kontrol; om task-value; ...
- Beliefs om den sociale kontekst
  - Om normer i klassen; om elevers og undervisers rolle i klassen; om socio-matematiske normer;
- Beliefs om matematik som disciplin
  - Om hvordan, hvornår og hvor matematikken er blevet til; Om hvad en matematiker laver; Om hvilken rolle matematik spiller i samfundet; Om matematiks rolle som videnskab; Om matematiks rolle ift. andre videnskaber; ...



Op't Eynde, de Corte, & Verschaffel (2002); Jankvist (2015)

33

33

Rikkes matematikforestilling

- Rikke har en forestilling om, at matematik ikke *må* være svært; det skal man bare kunne
- Specielt når man nu har haft det i over 10 år...
- Rikke synes at have en ”fornemmelse af ikke rigtig at kunne udøve matematik selv, da det kun er muligt for nogle der er klogere end hende”
- Dette kommer til at fungere som en ”blokering” i hendes matematiske udfoldelser
- Rikke blev udsat for en intervention om lineære, potens- og eksponentielle sammenhænge i en matematisk modellering kontekst

- Christian Wejdemann, Karl-Kristian Bjerregaard & Flóvin Tor Nygaard Næs (2017). Afsluttende rapport ved Matematikvejlederuddannelsen. Roskilde: RUC.

34

34

– et brev fra Rikke

- […] Det er gået op for mig, at det var en mulighed for at tænke og se på matematik anderledes end jeg ellers har gjort. Forløbet har givet mig nogle nye metoder hvorpå jeg kan se matematiske sammenhænge på andre måder, hvor jeg omvendt til at starte med følte, at det tog lidt hårdt på min faglige selvtillid. Dette har selvfølgelig ændret sig ☺ […] Jeg tør mere, også selvom det jeg nogle gange for sagt er forkert. Princippet er, at jeg gennem noget tid nu er begyndt at stole på mig selv mere end jeg ellers har gjort. […] jeg kan mærke, at jeg nu har mere lyst til at få undervisning i matematik fordi jeg grundet sessionerne med jer, på nogle områder føler mig mere sikker i faget. Jeg føler mig især også mere sikker på mig selv med hensyn til at få løst opgaver på grundlag som jeg selv har dannet – hvis I forstår. Altså, jeg sidder ikke og venter på, at mine klassekammerater siger til mig, at de har løst givne opgaver på sammen måde som jeg har gjort, hvor jeg på den måde ville få en bekræftelse, men at jeg nu rent faktisk selv stoler på det jeg gør og det jeg kan. Samarbejdet med mine klassekammerater i de enkelte matematiktimer – føler jeg selv – har ændret sig til min fordel hvis man kan sige det sådan. […]
- I og med, at jeg har fået nogle værktøjer og andre måder at se matematiske sammenhænge på har givet mig mere blod på tanden efter at løse flere mærkelige opgaver på egen hånd. […] Altså, for eksempel er der til eksponentialfunktioner en bestemt formel på forskriften og en bestemt måde grafen skal se ud på og nogle forskellige krav som skal være opfyldt. Tidligere, som I også lagde mærke til – fornemmer jeg – holdt jeg mig meget til, at kigge på en matematisk sammenhæng og ud fra de givne oplysninger og koble det til det grundlæggende, og derpå vurdere sammenhængen til enten at være en eksponentialfunktion eller en lineær eller lignende. Dette fungerede ikke altid lige godt, og nogle gange er det svært at vurdere en sammenhæng til at være noget bestemt (enten lineær, ekspotential, potens) uden rent faktisk at lave nogle
- udregninger på det. I lærte mig så med forskellige værktøjer og metoder, at man sagtens kan komme frem til en løsning på en sammenhæng uden, at man for starten af dømmer den til at være et eller andet ud fra nogle givne oplysninger.
- […] jeg vil sige, at jeg er blevet rigtig positivt overrasket over hvad jeg egentlig har fået ud af det hele. […]
- *Rikke*

35

35

Lidt om overgangs-problematikken

36

Om overgangsproblemer

- *Overgangsproblemer mellem grundskole og gymnasium i fagene dansk, matematik og engelsk* (Jessen et al., 2014)

- Elever peger bl.a. på følgende forskelle mellem folkeskole og gymnasie (N=216):
  - 53% niveauet, det er simpelthen bare mere svært
  - 14% undervisningen
  - 13% indholdet, specielt beviser og udledninger
  - 6% indholdet, bestemte emner
  - 2% computerprogrammer

37

37

fortsat...

- Gymnasielærerene peger på følgende, som de finder at eleverne har svært ved (N=77):
  - 38% fagets begreber og metoder
  - 38% grundlæggende matematik (de fire regningsarter, simpel ligningsløsning, simpel symbolbrug)
  - 29% avanceret matematik (algebra, 'bogstavregning', bevisførelse, kendskab til elementære funktioner, metoder, mv.)
  - 18% abstrakt tænkning
  - 12% at argumentere og præcisere
  - 9% at beskrive matematiske problemstillinger

38

38

Hva' ska' vi så gøre?

- Problematikken med elevers matematikspecifikke læringsvanskeligheder i gymnasiet (og grundskolen) er langt fra løst
- Men erfaringerne fra matematikvejlederuddannelsen viser, at det faktisk er muligt at gøre noget – med en målrettet (og forsknings-baseret) indsats
- Det kræver dog nok også et tættere samarbejde mellem de forskellige udannelsesniveauer
- Og hvad er så status på elevernes vanskeligheder anno 2024?

39

Det vanskelige 0

$$\frac{2}{x+1} = 3$$

$$2 = 3x + 1 - 1$$

$$2 + 1 = 3x$$

$$\frac{3}{3} = \frac{3x}{3}$$

$$0 = x$$

40

Fra Detektionstest 1

25. Er $x = 0$ en løsning til ligningen $3x - x = 2x$? Ja:☒ Nej:☐ Jeg siger ja, da ligningen altid går op. men man plejer helst ikke at regne m. 0.

26. Afrund $148,72 + 51,351$ til et helt tal: 200

20. Hvad er løsningen/løsningerne til ligningen $3x - x = 2x$? Ligningen kan løses med alle x-værdier

21. Hvad kan du sige om de to tal a og b når: $7c + 22 = 109$ og $7d + 22 = 109$? c = 84,6666 d = 84,6666 x-værdierne er ens

22. Hvad kan du med ord sige om sammenhængen mellem x og y når $y = x + 5$? At y = +5 større end x

23. Er $f(x) = x^2 - x$ og $g(x) = x(x - 1)$ lig hinanden eller er de forskellige? Lig hinanden:☐ Forskellige:☐ ?

24. Hvis $f(x) = 5$, er det så en funktion? Ja:☒ Nej:☐

25. Er $x = 0$ en løsning til ligningen $3x - x = 2x$? Ja:☐ Nej:☒

41

41

En 'Detektionstest 0'

- Mogens Niss og jeg har sidste år udarbejdet en ny test ift. elevers vanskeligheder med tallet 0
- Den er givet til 214 1.g'ere fra forskellige studieretninger på et godt præsterende dansk gymnasium – i foråret 2023
- Testen dækker 0 i situationer i såvel ren som anvendt matematik
- Den angår, hvorvidt 0 opfattes som et tal (eller ikke)
- Og 0 som 'agent' i divisioner og brøker

42

0 i anvendt matematik

- [Spg. 4] Du har 250 gram espressokaffe. Du bruger 10 gram pr. kop, du brygger. Hvor mange gram espressokaffe har du tilbage, når du har brygget 25 kopper espresso?
- 7,5% af eleverne svarer forkert

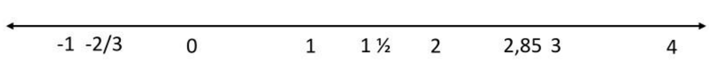
- [Spg. 13] På et analogt ur er klokken 12.00. Hvor mange grader er vinklen mellem den store og den lille viser?
- 10,5% af eleverne svarer forkert – flere med den begrundelse, at de ikke kan klokken på et analogt ur!

43

0 i ren matematik

- [Spg. 3] Hvilke heltal er der mellem -2 og 3,5, begge ender medregnet?
- 26,6% gav forkerte svar ved at ekskludere 0.

- [Spg. 18] På en tallinje herunder har vi markeret nogle tal. Hvilke af disse er heltal?
- 23,8% gav forkerte svar ved at ekskludere 0.



- Disse resultater antyder, at eleverne ikke anerkender 0 som et helt tal.

44

Vi arbejder på en artikel

- Resultaterne vil blive præsenteret i en artikel (som vi pt skriver på!)
- Denne vil omfatte de fleste af testens spørgsmål
- Den vil også omfatte et review af tidligere publiceret forsknings-litteratur om elevers vanskeligheder med tallet 0 (som i øvrigt går helt tilbage til 1959).

45

Tak fordi I lyttede med!

46

46