

Fælles indsats for tal og algebra

Matematikdidaktikkens dag

ABSALON
PROFESSIONS-
HØJSKOLEN
ABSALON

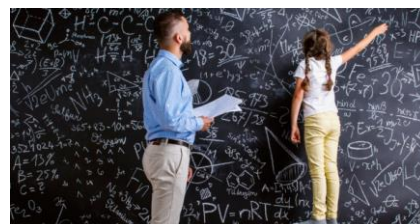


Charlotte Krog Skott, docent, Professionshøjskolen Absalon
8. marts 2024

1

Program

- Aktivitet
- Baggrund for tal- og algebraindsatsen
- Kort om indsatsen
- Om ét af indsatsens læringsspor "At løse ligninger"
- Mere om indsatsen
- Anvendelse af indsatsen – fokus på jeres rolle
- Inspiration til jeres gruppearbejde



ABSALON

2

2

Algebraisk tænkning Aktivitet

AB
SAL
ON

Hvor mange håndtryk skal der gives når 5 personer skal hilse på hinanden? Når 10 personer skal? Når n skal?

Algebraisk tænkning omfatter bl.a. (Arcavi, 2016):

- At opdage, formulere og begrunde generelle sammenhænge
- At opstille, oversætte, behandle og tolke algebraiske udtryk
- At ræsonnere med algebraiske udtryk
- At opstille og analysere funktioner



3

3

Baggrund

AB
SAL
ON

”Talforståelse og regnestrategier er for matematik, hvad læsning er for dansk”¹

Desværre peger flere kilder på, at mange elever i grundskolen, gymnasiet og EUD er udfordret i netop tal og algebra:

- Flere internationale undersøgelser, som TIMSS (Kjeldsen et al., 2019) og PISA (Christensen, 2019; Jóelsdóttir & Østergaard, 2023)
- Rapport fra en ekspertgruppe i matematik under Børne- og Undervisningsministeriet (Skott et al., 2022)
- Nationale undersøgelser, såsom Egmont Rapporten 2023
- Resultater fra nationale prøver og eksaminer, og censor beretninger



¹(Skott et al., 2022, s.18)

4

4

Baggrund Folkeskolens prøver uden hjælpemidler, 2023



Opgave 6

Indsæt tal, så udtrykkene bliver sande.

6.1 $5,76 = \underline{\hspace{2cm}} + 3,1$ **69,4 %**

6.2 $100 \cdot 7 = \underline{\hspace{2cm}} \cdot 14$ **66,1 %**

6.3 $\frac{1}{2} + \frac{\boxed{6,3,6}}{\boxed{6\ 4\ 4}} = \frac{7}{8}$ **32,1 %**

Opgave 7

Løs ligningerne.

7.1 $6x + 5 = 41$ $x = \underline{\hspace{2cm}}$ **79,9 %**

7.2 $4 \cdot (x + 1) = 5x$ $x = \underline{\hspace{2cm}}$ **47,4 %**

7.3 $\frac{x}{3} + 12 = 2x - 3$ $x = \underline{\hspace{2cm}}$ **28,9 %**

Opgave 11

Tabellen viser funktionsværdier for funktionen f .

11.1 Hvilken forskrift passer til tabellen?

x	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-8	-2	4	10	16	22

Sæt et X.

$f(x) = -x - 4$

$f(x) = x + 4$

$f(x) = -x + 4$

$f(x) = 6x + 4$

$f(x) = 6x - 8$

42,4 %

5

5

Baggrund Folkeskolens prøver uden hjælpemidler, 2023



Hvad går galt?

Opgave 6

Indsæt tal, så udtrykkene bliver sande.

6.1 $5,76 = \underline{2,75\ 8,86\ 2,65} + 3,1$

6.2 $100 \cdot 7 = \underline{700,\ 9800,\ 5} \cdot 14$

6.3 $\frac{1}{2} + \frac{\boxed{6,3,6}}{\boxed{6\ 4\ 4}} = \frac{7}{8}$

Opgave 7

Løs ligningerne.

7.1 $6x + 5 = 41$ $x = \underline{30,7,5}$

7.2 $4 \cdot (x + 1) = 5x$ $x = \underline{\hspace{2cm}}$

7.3 $\frac{x}{3} + 12 = 2x - 3$ $x = \underline{\hspace{2cm}}$

6

6

Fælles indsats for tal og algebra NCUMs bidrag

**AB
SAL
ON**

1. At beskrive en mulig sammenhæng og progression i elevers forståelser, færdigheder og kompetencer indenfor tal og algebra fra grundskole til ungdomsuddannelserne
2. At formidle læringsspor, der kan støtte lærere i såvel grundskolen som på ungdomsuddannelserne i at undervise, så den beskrevne sammenhæng og progression i tal og algebra kan realiseres i praksis.



7

7

Fælles indsats for tal og algebra Målgrupper

**AB
SAL
ON**

Matematiklærere og -vejledere i grundskolen, gymnasier og erhvervsuddannelser.

CFU-konsulenter og kommunale matematik konsulenter.

Studerende og undervisere på læreruddannelser og på matematikdidaktiske kurser i efter- og videreuddannelsestilbud.

Lærebogsforfattere og forlag.

Ledelser på skoler og uddannelsesinstitutioner.



8

8

Fælles indsats for tal og algebra NCUMs bidrag



– 16 læringsspor

Grundskolen:

- At addere etcifrede tal (1.-2. klasse)
- At subtrahere flercifrede tal (1.-2. klasse)
- At multiplicere flercifrede tal (3.-5. klasse)
- At dividere flercifrede tal (4.-6. klasse)
- At generalisere lineære sammenhænge (2.-6. klasse)
- At forstå brøker (3.-4. klasse)
- At addere brøker (4.-6. klasse)
- **At løse ligninger (3.-6. klasse)**
- At behandle algebraiske udtryk (7.-8. klasse)
- At forstå og anvende lineære funktioner (7.-8. klasse)
- At modellere med funktioner (9. klasse)

Gymnasiet:

- At løse ligninger (1.g)
- At forstå og anvende lineære funktioner (1.g)
- At arbejde algebraisk (1.g)

Erhvervsuddannelserne:

- Tal og måling i anvendelse
- Formler i anvendelse

- 6 NCUM-temaer
- En vejledning
- En artikel i et matematikdidaktisk tidsskrift

9

9

Eksempel på læringsspor At løse ligninger (3.-6. klasse)



Målet er, at elever udvikler strategier til at løse lineære ligninger indenfor de naturlige tal, herunder metoden *fjern og isoler*.

Målet er også, at elever udvikler forståelse for egenskaber ved ligninger.

Eleverne kan i forvejen regne med de fire regnearter og ved fx at subtraktion er modsat addition, og de kan sammenligne regneudtryk som fx $15 + 8 = 13 + 10$, og begrunde, hvorfor de har samme værdi.

Sporet er opdelt i fire faser. Det kan evt. deles to eller tre.

Undervisningen vil typisk have en fælles iscenesættelse, selvstændigt arbejde i mindre grupper og fælles faglig samtale.



10

10

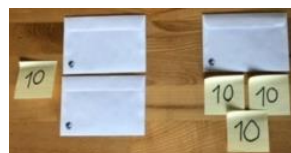
At løse ligninger (3.-6. klasse)

Fase 1 – Ligningssituationer og uformelle strategier

**AB
SALON**

Kan løses med konkrete materialer fx kuverter og penge
Fx

Hver uge får Sofus og Alma en kuvert med lige mange lommepege. Sofus har gemt 2 kuverter og har desuden 10 kr. i sin lomme. Alma har kun gemt 1 kuvert, men hun har 30 kr. i sin lomme. Sofus og Alma har nu lige mange penge. Hvor meget får de i lommepege?



"Først tænkte vi, at der var 10 i. Så havde Sofus 30 og Alma 40. Ikke rigtigt. Så prøvede vi med 20. Og det passede"

11

11

At løse ligninger (3.-6. klasse)

Fase 2 – Tegninger og fjerner-strategier (subtraktion)

**AB
SALON**

Læreren introducerer tegninger og skitser af kuverter og penge – og lighedstegnet.
Læreren kan tilskynde fjerner-strategier
Fx

$$\begin{array}{l} \text{Sofus} \\ \square \text{ } 10 \\ \square \end{array} = \begin{array}{l} \text{Alma} \\ \square \text{ } 10 \\ 10 \text{ } 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Sofus} \\ \square \text{ } 10 \\ = \end{array} \begin{array}{l} \text{Alma} \\ 10 \text{ } 10 \\ 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Sofus} \\ \square \text{ } \cancel{10} \\ = \end{array} \begin{array}{l} \text{Alma} \\ \cancel{10} \text{ } 10 \\ 10 \end{array}$$

Sofus og Alma har en lillebror som ikke får penge. Det synes de er synd for ham. Så de giver ham hver en kuvert med penge. De to kuverter, som de giver til lillebror, visker jeg ud. Hvor mange penge har Sofus og Alma hver nu? Før havde de lige mange penge. Hvad nu?

Hov, det var let at løse problemet nu. Hvorfor?

12

12

At løse ligninger (3.-6. klasse)

Fase 3 – Algebraisk notation og fjerner-strategier (+division)

Læreren introducerer algebraisk notation ud fra velkendte tegninger
Eleverne kan løse dem i en blanding af tegninger og algebraisk notation

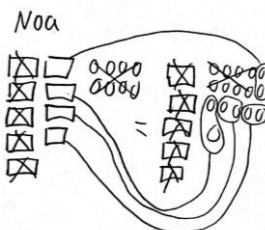
Fx

$$2x + 10 = x + 30$$

$$2\boxed{} + 10 = \boxed{} + 30$$

$$\boxed{} = 20$$

$$9x + 8 = 5x + 16$$



Alma

$$9\boxed{} + 8 = \boxed{} + 16$$

$$4\boxed{} = 8$$

$$\boxed{} = 2$$

13

13

At løse ligninger (3.-6. klasse)

Fase 4 – Algebraisk notation og fjerner-strategi (+addition)

Læreren introducerer ligninger med subtraktion
Algebraisk notation bliver vigtig

$$3x - 5 = 2x + 7$$

Hvad er smartest at gøre? Skal jeg lægge 5 til på begge sider eller trække 7 fra?

$$5x - 4 = 10 - 2x$$

$$5x - 4 = 10 - 2x$$

$$5x - 4 + 4 = 10 + 4 - 2x$$

$$5x + 0 = 14 - 2x$$

$$5x + 2x = 14 - 2x + 2x$$

$$7x = 14$$

$$x = 2$$

14

14

At løse ligninger (3.-6. klasse) Progression

Trædestenene kaldes matematiske praksisser



Faser i læringssporet

- Fase 1**
At løse ligninger, der har form som **lignings-situationer**, ved at bruge **uformelle strategier** og med støtte i **konkrete materialer**.
- Fase 2**
At løse ligninger, der har form som **tegninger**, ved at bruge **fjerne-strategier** og med støtte i **tegninger**.
- Fase 3**
At løse ligninger, der er skrevet som **algebraiske udtryk**, ved at bruge **fjern og isoler metoden** og med støtte i **tegninger**.
- Fase 4**
At løse ligninger, der er skrevet som **algebraiske udtryk**, ved at bruge **fjern og isoler metoden** og med støtte i **noter**.

Hver uge får Sofus og Alma en kuvert med lige mange lomme penge. Sofus har gemt 2 kuverter og har desuden 10 kr. i sin lomme. Alma har kun gemt 1 kuvert, men hun har 30 kr. i sin lomme. Sofus og Alma har nu lige mange penge. Hvor meget får de i lomme penge?



$$\begin{aligned} & \square + \cancel{\square} = \frac{10}{10} + \cancel{\square} \\ 2\square + \cancel{\square} &= \cancel{\square} + \frac{30}{20} \\ \square &= 20 \\ 2x + 10 &= x + 30 \\ -x & \quad -x \\ x + 10 &= 30 \\ &= 20 \end{aligned}$$

At løse ligninger (3.-6. klasse) Oversigt

Fagligt udgangspunkt

- Erfaringer med de fire regningsarter, herunder med modsatte regningsarter, fx $22 - 7 = 15$ fordi $15 + 7 = 22$
- Erfaringer med at sammenligne og begrunde, hvorfor nogle regneudtryk har samme værdi, fx $10 + 1 = 1 + 2$, $15 + 8 = 13 + 10$, $2 \cdot 7 = 7 \cdot 2$

Faser i læringssporet

- Fase 1**
At løse ligninger, der har form som **lignings-situationer**, ved at bruge **uformelle strategier** og med støtte i **konkrete materialer**.
- Fase 2**
At løse ligninger, der har form som **tegninger**, ved at bruge **fjerne-strategier** og med støtte i **tegninger**.
- Fase 3**
At løse ligninger, der er skrevet som **algebraiske udtryk**, ved at bruge **fjern og isoler metoden** og med støtte i **tegninger**.
- Fase 4**
At løse ligninger, der er skrevet som **algebraiske udtryk**, ved at bruge **fjern og isoler metoden** og med støtte i **noter**.

Hver uge får Sofus og Alma en kuvert med lige mange lomme penge. Sofus har gemt 2 kuverter og har desuden 10 kr. i sin lomme. Alma har kun gemt 1 kuvert, men hun har 30 kr. i sin lomme. Sofus og Alma har nu lige mange penge. Hvor meget får de i lomme penge?

$$\begin{aligned} & \square + \cancel{\square} = \frac{10}{10} + \cancel{\square} \\ 2\square + \cancel{\square} &= \cancel{\square} + \frac{30}{20} \\ \square &= 20 \\ 2x + 10 &= x + 30 \\ -x & \quad -x \\ x + 10 &= 30 \\ &= 20 \end{aligned}$$

Forslag til videre arbejde

- At løse ligninger med rationale tal og ubekendte, fx $2 = 6 - \frac{1}{4}x$, $\frac{3}{4}x + 7 = -5$, $2(x + 9) = x + 16$
- At løse uligheder, fx $5x \leq x + 78$
- At løse ligninger, der ikke har nogen løsninger, fx $3x - 1 = 4 + 3x$ eller har mange løsninger, som fx $7(x + 4) - 8 = 7x + 20$

Opbygning af læringsspor



1. *Introduktion:* Beskriver sporets mål, dets faglige indhold, og de klassetrin, sporet retter sig mod.
2. *Målene:* Udfolder målene og hvad elever, der er kommet langt i forhold til dem, forventes at kunne.
3. *Oversigt:* Visuelt billede af sporet, dvs. sporets faglige afsæt, dets faglige progression, og oplagt videre arbejde.
4. *Tilgang:* Beskriver de faglige og fagdidaktiske ideer, som sporet bygger på, og udfolder den faglige progression igennem sporets faser.
5. *Læringssporet i praksis:* Beskriver sporets praktiske rammer og skitserer opmærksomhedspunkter for læreren og ideer til undervisningen.
6. *Grundlag:* Udfolder den forskning sporet bygger på.



17

17

Faglig progression Ligning og ligningsløsning



Grundskolen

Gymnasiet

Spør om de naturlige tal og regning med dem

At løse ligninger (3.-6.):
Forstå ligninger i de naturlige tal
Løse ligninger med *fjern og isoler* (subtraktion, division, addition)

At behandle algebraiske udtryk (7.-8.):
Opstille, omskrive, tolke og foretage beregninger med algebraiske udtryk i de reelle tal

At forstå og anvende lineære funktioner (7.-8.):
Løse ligninger i de rationelle tal algebraisk (multiplicere)
Løse ligninger grafisk

At løse ligninger (1. g):
Udlede ligningen for den rette linje
Udvikle *reducer og isoler*
Løse lineære ligninger, men også andre fx trigonometriske
To ligninger med to ubekendte

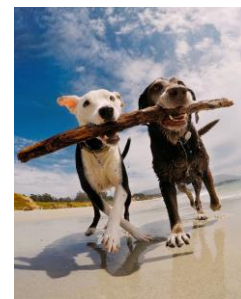
18

18

Anvendelse af læringsspor i praksis Bredt perspektiv

**AB
SALON**

- Forlag, hvor en forfattergruppe skriver læremidler ud fra læringsspor.
- CFU-kurser, FIP-kurser og i efter-/videreuddannelsesforløb, hvor en gruppe lærere i samarbejde med en konsulent formulerer klasserumsaktiviteter, der bygger på de bærende ideer i et læringsspor.
- Læreruddannelsen, hvor lærerstuderende, evt. i samarbejde med en underviser, udvikler undervisningsforløb på grundlag af et læringsspor.
- Skoler, gymnasier og EUD-skoler, hvor lærere, på egen hånd lader sig inspirere af et læringsspor i sin undervisning.
- Skoler, hvor en gruppe lærere, evt. i samarbejde med en matematikvejleder, afprøver og diskuterer klasserumsaktiviteter, der bygger på et læringsspor.



20

20

Anvendelse af læringsspor i praksis På skolen, gymnasiet og EUD-skolen

**AB
SALON**

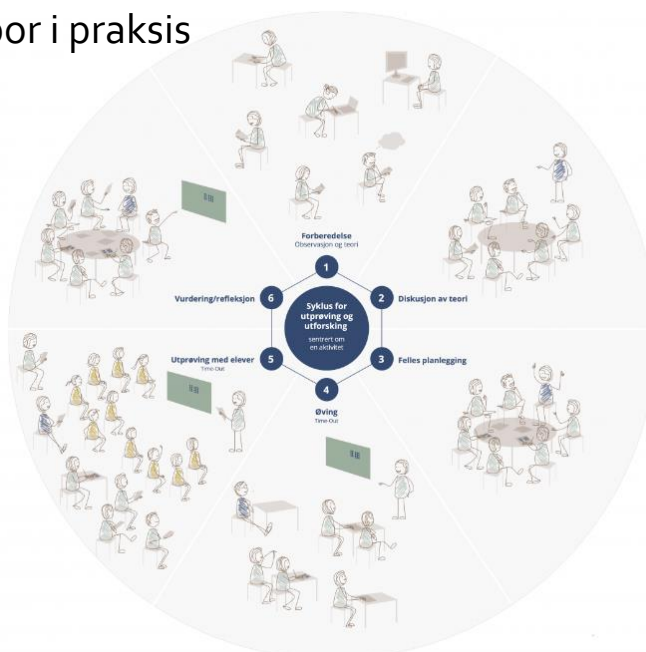
- I den daglige undervisning som inspiration for den enkelte lærere.
- I årsplanlægningen, hvor sporene kan give inspiration til planlægning af årets undervisningsforløb.
- På fagteammøder, hvor et læringsspor kan være omdrejningspunkt for drøftelse af centrale aspekter ved et specifikt indhold.
- I lokale udviklingsforløb, hvor der eksperimenteres med undervisning, der er baseret på et læringsspor
- I brobyggende samarbejde mellem undervisere i grundskolen, på gymnasier og erhvervsuddannelser.
- I forsknings- og udviklingsprojekter, hvor lærere kan få støtte og ledelsesmæssig opbakning til at samarbejde om anvendelse og videreudvikling af læringssporene.

21

21

Anvendelse af læringsspor i praksis Vejlederens rolle

- Informere og inspirere kollegaer.
- Sparre med kollegaer.
- Organisere samarbejde med vejledere på EUD/gymnasier/ skoler.
- Igangsætte og facilitere mindre og større afprøvninger af læringsspor, fx via [MAM-modellen](#) (Mestre Ambitiøs Matematikundervisning).
- Informere og drøfte tal- og algebra-indsatsen med skolens ledelse.



22

22

Mens vi venter ... Hvad kan I gøre allerede nu

- Undersøg de **temaer** på NCUM (matematikdidaktik.dk), som knytter sig til tal og algebra indsatsen:
 - At regne med etcifrede tal (indskolingen)
 - At regne med flercifrede tal (melletrin)
 - At regne med brøker (melletrin) – udgives i 2024
 - (Algebra på de yngste klassetrin) (indskolingen)
 - Algebra i gymnasiet
 - Algebra i erhvervsskolen
 - Algebra på tværs
- Læs om [MAM-modellen](#) og diskuter/planlæg, hvordan I kan bruge (dele af) modellen til at arbejde med et bestemt tema i jeres faggruppe eller i en mindre gruppe lærere. Herunder hvad er jeres opgaver, som vejledere? Hvilke stofdidaktiske ideer er centrale? Og hvilke matematikfaglige begreber?
- Se **NCUM webinarer** knyttet til tal og algebra fx *Tidlig algebraisk tænkning* ved Carolyn Kieran eller *Brøker og undervisningskompleksitet* ved Pernille Ladegaard på <https://matematikdidaktik.dk/webinarer>
- Drøft hvordan I kan bruge disse webinarer på faggruppemøder eller i forbindelse med MAM modellen

23

23

**Tak for jeres
opmærksomhed!**

Spørgsmål eller kommentarer?

**AB
SAL
ON**
PROFESSIONS-
HØJSKOLEN
ABSALON

