



1

Plan

- ❖ Formål for og udformning af national indsats for tal & algebra
- ❖ Læringsspor som fælles matematiske praksisser
- ❖ Tre sammenhængende spor som eksempel
 - At multiplicere flercifrede tal
 - At generalisere lineære sammenhænge
 - At forstå og anvende lineære funktioner
- ❖ Hvordan indsatsen bidrage til at forebygge læringsvanskelighed i matematik?
- ❖ Tid til spørgsmål og drøftelse

NCUM | Nationalt Center for Udvikling af Matematikundervisning | matematikdidaktik.dk

2

Udvikling af en national indsats til styrkelse af undervisning inden for tal og algebra

Indsatsen udvikles af NCUM for Børne- og Undervisningsministeriet

Holdet bag indsatsen er:
Charlotte Krog Skott (tovholder)
Marit Schou, Morten Blomhøj, og
Thomas Kaas med assistance fra
Mikkel Johansen til EUD, og fra
Pernille Ladegaard til brøker m.v.



3

To hovedformål med tal & algebra indsatsen, som NCUM udvikler for BUVM

- 1. At opnå **sammenhæng og progression** i elevers **forståelser, færdigheder og kompetencer** inden for **tal og algebra** fra grundskole til endt ungdomsuddannelse.
- 2. At **støtte lærere** i grundskolen og ungdomsuddannelser i at **undervise, så sammenhængen og progressionen kan realiseres** i praksis.

NCUM | Nationalt Center for Udvikling af Matematikundervisning
matematikdidaktik.dk



4

Læringsspor til tal & algebra indsatsen (klar i januar 2024)

NCUM

Grundskole:

- ✓ At addere etcifrede tal
- ✓ At subtrahere flercifrede tal
- ✓ At multiplicere flercifrede tal
- ✓ At dividere flercifrede tal
- ✓ At generalisere lineære sammenhænge
- ✓ At forstå brøker
- ✓ At addere brøker
- ✓ At løse ligninger
- ✓ At forstå og anvende lineære funktioner

EUD:

- ✓ Tal og måling i anvendelse
- ✓ Formler og beregninger med enheder
- ✓ Lineære funktioner i anvendelse

Gymnasie:

- ✓ Symboler og deres roller i udtryk og formler
- ✓ Lineære ligninger og deres løsning og fortolkning
- ✓ Lineære funktioner og deres anvendelser

Der kan komme flere spor til efterfølgende

NCUM temaer, der understøtter tal & algebra indsatsen

NCUM

- 1. Indskoling - At regne med etcifrede tal
- 2. Indskoling - Algebra for de yngste klassetrin
- 3. Mellemtrin - At regne med flercifrede tal
- 4. Mellemtrin - At regne med brøker
- 5. Gymnasie - Algebra i gymnasiet
- 6. Gymnasie - Funktioner i gymnasiet
- 7. Erhvervsudd. - Algebra i erhvervsskolen
- 8. Tværgående - Algebra på tværs

De grønne er udkommet på matematikdidaktik.dk

Der kan komme flere temaer senere.

NCUMs leverancer til BUVM	■	■	■	■	■	■	■
✓ En samlet lærervejledning	■	■	✓	■	■	■	■
✓ 15 læringsspor – 9 til grundskolen, 3 til eud og 3 til gym.	■	■	■	■	■	■	■
✓ 8 temaer - 4 til grundskolen, 1 til eud, 2 til gym. og et tværgående	■	■	■	■	✓	■	■
✓ Derudover produceres en artikel om indsatsen og dens matematikdidaktiske grundlag	■	■	■	■	■	■	■
✓ Sporene og lærervejledningen publiceres (formentlig) af BUVM	■	■	■	■	■	■	■
✓ Til hvert spor produceres en plakat over sporets faser og centrale praksisser.	■	✓	■	■	■	■	■
✓ Sporene og lærervejledningen publiceres ligesom temaerne på www.matematikdidaktik.dk	■	■	■	■	■	■	■
✓ Der er ikke endnu truffet aftale med BUVM om implementering af tal og algebra indsatsen.	■	■	■	■	■	■	✓
✓ I NCUM medtænker vi tal og algebra indsatsen ved design af og ansøgninger om støtte til forsknings- og udviklingsprojekter.	■	■	■	■	■	■	■
	■	■	■	■	■	■	■

7

Målgrupper for indsatsen	■	■	■	■	■	■	■
	■	■	✓	■	■	■	■
Kernemålgruppen for sporene til de tre niveauer:	■	■	■	■	■	■	■
• Lærere i grundskole, erhvervsskole og gymnasie	■	■	■	■	✓	■	■
• Matematikvejledere i grundskole og gymnasie	■	■	■	■	■	■	■
• CFU- og kommunale konsulenter	■	■	■	■	■	■	■
• Fag- og læringskonsulenter i ministeriet (FIP kurser)	■	■	■	■	■	■	■
Målgrupper ved implementering:	■	✓	■	■	■	■	■
• Undervisere på læreruddannelser	■	■	■	■	■	■	■
• Undervisere på de fagdidaktiske kurser fx teoretisk pædagogikum	■	■	■	■	■	■	✓
• Lærebogsforfattere	■	■	■	■	■	■	■
	■	■	■	■	■	■	■
	■	■	■	■	■	■	■

8

Læringsspor som omdrejningspunkt

Læringsspor som fælles matematiske praksisser (Cobb et al. 2001):

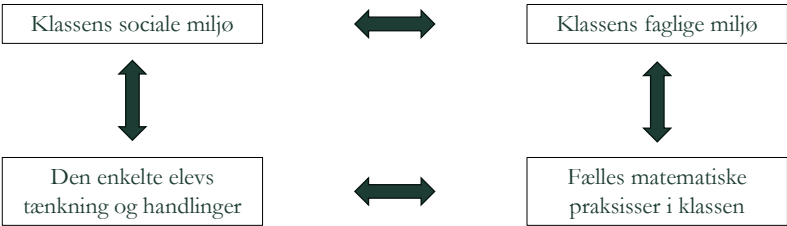
- 1. Beskrivelse af mål for elevernes læring
- 2. Specifikation af elevernes udgangspunkt
- 3. Hypotetisk sekvens af matematiske praksisser, der kan føre til målet
- 4. Oversigt i plakatform over sammenhæng i mål og praksisser
- 5. Faserne i sporet udfoldet som praksis til lærerne
- 6. Redegørelse for det matematikdidaktiske grundlag for sporet.

Læringssporene er udvalgt med fokus på:

- Emner og begreber der er særligt udfordrende for elever.
- Emner og begreber der er centrale for elevernes læring.
- Emner og begreber der kan bidrage til sammenhæng i elevernes matematiklæring i et længere perspektiv.



Læringssynet bag fælles matematiske praksisser (Cobb et al. 2001)



- Socialkonstruktivistisk inspireret læringssyn, der har fokus på samspillet mellem på den ene side elevens tænkning og handlinger og dermed deres læring og på den anden side udvikling af fælles matematiske praksisser i klassen.
- Den enkelte elevs og – gennem social interaktion – elevernes virksomhed formes af matematiske praksisser i klassen samtidig med at disse praksisser netop udvikles gennem elevernes virksomhed.
- Dette samspil virker både på det sociale niveau (klasserumsniveau) og på det psykologiske niveau (individuelle niveau). (Cobb og Yackels, 1996)

To perspektiver på matematiske praksisser

Det sociale perspektiv	Det psykologiske perspektiv
Sociale normer i klassen	Forestillinger om ens egen og andres rolle i klassen og om den generelle karakter af at have matematik i skolen
Sociomatematiske normer i klassen	Forestillinger om og værdier knyttet til matematik og matematisk aktivitet
Klassens matematiske praksisser	Den enkeltes matematiske tænkning om begreber og aktiviteter

Cobb og Yackels (1996, s.177) model for analyse af en classes kultur

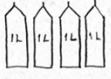
Klassen er således central i udviklingen af matematiske praksisser

11

AT MULTIPLICERE FLERCIFREDE TAL
4.-6. KLASSE

Fagligt udgangspunkt

Erfaringer fra forskellige situationer med multiplikation



Oie, købte 4 L mælk til...

Strategier til multiplikation med etcifrede tal

4 · 6

Jeg tænker det dobbelte af 6 er 12. Det dobbelte af 12 er...

Paratviden om nogle resultater af etcifret multiplikation

$2 \cdot 6 = 12$
 $4 \cdot 5 = 20$

Erfaringer med talsystemet og evt. med at multiplicere 10, 20, 30,...

4 · 10 = 40



Faser i læringsløbet

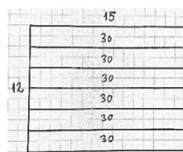
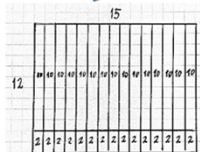
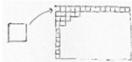
Fase 1

At løse hverdagsproblemer der involverer flercifret multiplikation med støtte i konkrete materialer og tegninger.

Fase 2

At multiplicere flercifrede tal med støtte i rektangler med kvadratnet og talsymboler.

En familie vil bygge en (rektangulær) terrasse. Terrassen skal have 12 kvadratiske fliser på den ene led og 15 kvadratiske fliser på den anden led. Hvor mange fliser skal familien bruge i alt?



12

AT MULTIPLICERE FLERCIFREDE TAL
4.-6. KLASSE

Fase 3

At multiplicere flercifrede tal **fleksibelt** med støtte i skitserede rektangler og talsymboler.

Fase 4

At multiplicere flercifrede tal **fleksibelt** med støtte i skitserede rektangler og regneudtryk.

1015150230

105100502010

1015150230

$12 \cdot 15 = 10 \cdot 15 + 2 \cdot 15 = 150 + 30 = 180$

$12 \cdot 15$

$\begin{array}{r} 100 \\ + 50 \\ + 20 \\ + 10 \\ \hline 180 \end{array}$

Forslag til videre arbejde

100404

100202

10,40,4

10,20,2

$2 \cdot (10+4) = 2 \cdot 10 + 2 \cdot 4$
 $(10+2) \cdot (10+4) = 10 \cdot 10 + 10 \cdot 4 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 4$

$\begin{array}{cc|cc} & b & c & \\ a & ab & ac & \end{array}$

13

AT MULTIPLICERE FLERCIFREDE TAL
4.-6. KLASSE

Eksempel: 18 · 25		
Sekventiel strategi	Opdelingsstrategi	Varieret strategi
18 gange skal jeg tage 25. Jeg tager fire 25'ere ad gangen. Det bliver 100, 200, 300, 400. Der er to 25'ere tilbage. Så bliver det 450.	Jeg deler 18 op i 10 og 8. Så regner jeg 10 · 25. Det er 250. Så regner jeg 8 · 25. Det er 200. Det bliver 250 + 200 = 450.	Jeg tænker først 20 · 25. Det er 250 + 250, altså 500. Men det er for meget. Jeg skal trække to gange 25 fra. Det er altså 500 – 50 = 450.

25

100200300400450

25

102508200

25

500500450

14

7

AT GENERALISERE LINEÆRE SAMMENHÆNGE

2.-6. KLASSE

Oversigt

Fagligt udgangspunkt

Addition med tocifrede tal

$23 + 15$

Multiplikation med etcifrede tal

$4 \cdot 6$

Faser i læringssporet

Fase 1

At finde talpar i funktionssituationer med lineære sammenhænge.

Fase 2

At beskrive lineære sammenhænge med funktions-
tabeller og regneudtryk.

Rektangler med en fri sidelængde og en sidelængde på 4. Hvor mange tern kommer bliver der?



Højde	Antal tern
1	4
2	8
3	12
4	16

$1 \cdot 4 = 4$
 $2 \cdot 4 = 8$
 $3 \cdot 4 = 12$
 $4 \cdot 4 = 16$

15

AT GENERALISERE LINEÆRE SAMMENHÆNGE

2.-6. KLASSE

Fase 3

At opdage, begrunde og beskrive generelle lineære sammenhænge faktuelt og kontekstuelt.

Fase 4

At opdage, begrunde og beskrive generelle lineære sammenhænge på alsidige måder, bl.a. med bogstavudtryk.

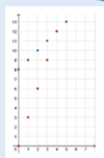
Hvis højden er 100, er det $100 \cdot 4$.

Man kan tælle, hvor høj den er og så gange det tal med 4.

$h \cdot 4 = t$

Forslag til videre arbejde

Grafer i koordinat-system



Funktionsforskrifter

$f(x) = ax + b$

Ligninger

$4x + 6 = x + 12$

16

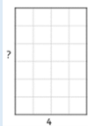
AT GENERALISERE LINEÆRE SAMMENHÆNGE

2.-6. KLASSE

Eksempel (funktionssituation i ren matematisk kontekst - se også oversigten):

Rektangler med en fast sidelængde

Tegn mindst 5 forskellige rektangler på ternet papir.
Den ene sidelængde skal være 4. Den anden sidelængde bestemmer du selv.

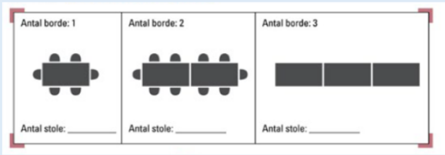


Hvad er sammenhængen mellem den frie sidelængde og antallet af tern i sådan et rektangel?

Eksempel (funktionssituation i en omverdenkontekst):

Borde og stole

Se på tegningerne. Hvor mange stole passer til 1 bord? 2 borde?



Hvordan fortsætter det, hvis man stiller flere borde på række?
Hvor mange stole skal man bruge til 10 borde?
Til et eller andet antal borde?



17

AT FORSTÅ OG ANVENDE LINEÆRE FUNKTIONER

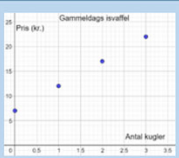
7.-8. KLASSE

Oversigt

Erfaringer med at opdage, beskrive og generalisere lineære sammenhænge indenfor de naturlige tal

Erfaringer med at opstille og løse lineære ligninger skrevet som algebraiske udtryk, såsom $4x - 5 = 3 + 2x$, ved at fjerne og isolere x .

Erfaringer med at bruge dynamisk geometri og formler i regneark.



Faser i læringssporet

Fase 1

At oversætte sproglige beskrivelser af lineære sammenhænge til funktionstabeller, regneudtryk og grafer.



Fase 2

At oversætte sproglige, tabel, regneudtryk og grafiske repræsentationer af lineære sammenhænge til algebraiske udtryk, særligt forskrifter.



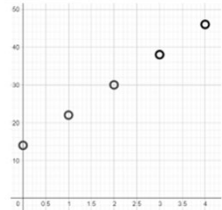
Sproglig beskrivelse:

Iskiosken sælger gammel-dags isvaffler. Hver kugle koster 8 kr. og vafflen koster 14 kr. Hvordan finder man prisen for isvaffler med forskellige antal kugler is?

Antal kugle	is pris
1	$1 \cdot 8 + 14 = 22$
2	$2 \cdot 8 + 14 = 30$
3	$3 \cdot 8 + 14 = 38$
4	$4 \cdot 8 + 14 = 46$
5	$5 \cdot 8 + 14 = 54$

$$pris = 8 \cdot kugler + 14$$

$y = 8 \cdot x + 14$, hvor x er antal kugler og y er prisen



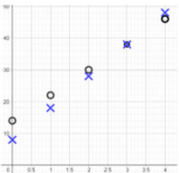
18

AT FORSTÅ OG ANVENDE LINEÆRE FUNKTIONER

7.-8. KLASSE

Fase 3

At sammenligne lineære sammenhænge og at opstille og løse ligninger med støtte i funktionstabeller, grafer, regneudtryk og algebraiske udtryk.

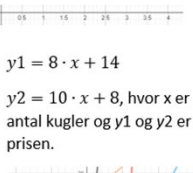


Fase 4

At ræsonnere om generelle lineære sammenhænge ved hjælp af forskriften for en lineær funktion, $y = a \cdot x + b$, med betydningen af a og b , og deres fortolkning i sproglig, tabel og grafisk repræsentation.

$y_1 = 8 \cdot x + 14$

$y_2 = 10 \cdot x + 8$, hvor x er antal kugler og y_1 og y_2 er prisen.



Funktion:

- 1) $y = 8x + 14$
- 2) $y = 20x - 100$
- 3) $y = -\frac{4}{3}x + 22$
- 4) $y = -x + 12$
- 5) $y = 2x + \frac{5}{7}$
- 6) $y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$

Generelle forskrift:

$$y = a \cdot x + b$$

NC
UM

Forslag til videre arbejde

Arbejde med andre typer af funktioner som vækst med konstant rate (procentvis vækst) eller potensfunktioner.

Modellering af reelle problemstillinger ved hjælp af lineære funktioner.

	1	2	3	4	5	6	7
Hvordan kan tal & algebra indsatsen bidrage til at forebygge læringsvanskelighed ?							
1. Fokus på udvikling af fælles matematiske praksisser i klassen kan bidrage til at flere elever, udvikler forståelse af centrale begreber.							
2. Det kan tydeliggøre for læreren, at nogle elever endnu ikke behersker en given praksis.							
3. Fokus på progression gennem sammenhængende praksisser støtter læring for alle, men især for elever, der oplever læringsvanskeligheder. Det giver mulighed for, at eleverne kan vende tilbage til praksisser, som de behersker, når de møder læringsudfordringer.							
4. Læringssporerne kan hjælpe lærerne med at se og realisere en faglig sammenhæng og progression i undervisningen. Det kommer alle elever, men især de udfordrede til gode.							
5. Det grundlæggende læringssyn bag læringsspor som udvikling af fælles matematiske praksisser er inkluderende derved, at alle elever søges involveret i udviklingen af de fælles praksisser i klassen. Det er målet, at alle elever lære at beherske de centrale praksisser.							



Referencer

- Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *Journal of the Learning Sciences*, 10(1-2), 113-163.
https://doi.org/10.1207/S15327809JLS10-1-2_6
- Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist*, 31(3-4), 175-190.



11