

Matematik og skriftlighed

i overgangen fra skole til gymnasium

*Kasper Bjering Søby Jensen,
Gymnasieekspertgruppen ved NCUM*

*8/12-2022
Emdrup*

Indhold i oplæg

1. Hvem er jeg?
2. Faglige overgange -
lidt erfaringer og betragtninger
3. Hvor skal eleverne hen i gymnasiet?
4. En teoretisk ramme for skriftlighed
5. Et par nedslag i nogle problemer

Hvem er Kasper Bjerling Søby Jensen

- Lektor ved Roskilde Katedralskole i matematik (og fysik)
 - Speciale i "Matematik og tværfaglighed i gymnasieskolen"
- Ph.d. i matematikkens didaktik ("Fagidentitet")
- Medlem af "Matematikkommissionen" i 2016.
- Medlem af gymnasieekspertgruppen ved NCUM
- Far til tre børn i den danske folkeskole (1., 5. og 7. klasse)
- Medlem af censorkorpset ved læreruddannelsen i matematik.
- Byrådspolitiker (9 år), formand for skoleudvalg.

Faglige overgange

- Roskilde Kommune 2015-2018: 10 workshops
 - Lærere fra alle grundskoler, gymnasiale uddannelser, erhvervsuddannelser, AVU samt repræsentanter fra læreruddannelse og universitet.
 - Workshops om: Symbolbehandlingskompetence, skriftlighed, læringsvanskeligheder, matematik i anvendelse, folkeskolens afgangsprøve, faglig kommunikation og undersøgende matematik.
 - Det helt store udbytte lå i "mødet mellem uddannelserne".
- Mange andre "overgangssamarbejder" – kan generelt anbefales.

Et syn på "den faglige overgang"

- Der findes ikke overgange, der findes kun:

UDGANGE og det der går forud
samt

INDGANGE og det der kommer efter.

- I dette syn ligger en grundlæggende respekt for forskellighederne på hver side af "overgangen".



Faglige overgange

Matematikkommissionen 2016:

"Gymnasiets matematikundervisning udgør for de fleste elever et paradigmeskift, hvoraf nogle af de væsentligste aspekter er

- fra en intuitiv og induktiv til en formel og definatorisk forståelse af matematiske begreber.
- fra et resultatfokus med ad hoc beregninger til et metodefokus med strategier og anvendelse af sætninger og formler.
- fra beskrivende og forklarende til ræsonnerende og begrundende matematiktekster, skriftlige såvel som mundtlige
- fra narrativ tilgang i grundskolen til tekster som ikke direkte appellerer til situationer."

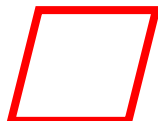
Faglige overgange

"Fra en *intuitiv og induktiv* til en *formel og definatorisk* forståelse af matematiske begreber"

- "Hvad er en cirkel?"



- "Er et kvadrat et rektangel?"



- "Hvad er en funktion?"

Tall og Vinner:

Concept image vs.
Concept definition

Faglige overgange

"Fra et resultatfokus med ad hoc beregninger til et metodefokus med strategier og anvendelse af sætninger og formler."

$$\begin{aligned} 7x - 5 &= 16 \\ 16 + 5 &= 21 \\ 21 : 7 &= 3 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

LÆRER: Hvad er løsningen på ligningen $7x - 5 = 16$?

ELEV: 3

LÆRER: Ja, altså... løsningen er $x = 3$.

ELEV: Ja, ja...

LÆRER: Hvorfor?

ELEV: Fordi 7 gange 3 er 21, og 21 minus 5 er 16...

LÆRER: Ja, det er rigtigt... men hvordan kom du frem til løsningen?

ELEV: Det kunne jeg da bare se?

LÆRER: Nej, nej... du må forklare hvordan du kommer frem til løsningen!

Først flytter jeg 5 over
på den anden side...

Faglige overgange

"Fra beskrivende og forklarende til ræsonnerende og begrundende matematiktekster, skriftlige såvel som mundtlige."

ELEV: Vinkelsummen i en trekant er 180°

LÆRER: Hvorfor? Hvordan ved du det?

ELEV:



Faglige overgange

"Fra beskrivende og forklarende til ræsonnerende og begrundende matematiktekster, skriftlige såvel som mundtlige."

ELEV: Pythagoras sætning siger, at $a^2 + b^2 = c^2$

LÆRER: Gælder det for $a = 1$, $b = 2$ og $c = 3$?

ELEV:



Faglige

"Fra narra
til situatio

Regnehiste

"Et barn h

a) Barnet
Hvor nb) Barnet skal vælge en bil, et skib og en flyvemaskine.
Hvor mange valgmuligheder har barnet?"*Multiplikationsprincip*(165) $n \cdot m$ Antal mulige måder at vælge
både ét element fra N og et
element fra M , hvor N består
af n elementer og M består af
 m elementer

kte appellerer

Additionsprincip(166) $n + m$ Antal mulige måder at vælge
enten ét element fra N *eller* ét
element fra M , hvor N består
af n elementer og M består af
 m elementer

vemaskiner.

Hvor skal eleverne hen i gymnasiet?

- Gymnasiematikken bygger på to "dikotomier":

Skriftlighed >< Mundtlighed

Hjælpemidler >< Uden hjælpemidler

- Eleverne skal lære matematik – og skal *tale* og *skrive* om matematik
- Eleverne skal kunne tænke både uden og med en computer

Opgaveformulering

Hvilke ligheder og forskelle er der mellem det gyldne snit anvendt i matematik og musik?

- Giv en redegørelse for "Det gyldne snit" i matematikken. Kom herunder særligt ind på tallet Φ , og vis egenskaber ved dette tal efter eget valg.
- Giv en redegørelse for Fibonacci-tallene og deres relation til "det gyldne snit". Giv herunder et bevis for Binets formel.
- Redegør for teorien om det gyldne snits forekomst i populærmusikken, med udgangspunkt i Henrik Marstals "Hitskabelonen" (2003).
- Analysér selvvalgte eksempler på musik ud fra "Hitskabelonen". Argumentér for dit valg af analysemateriale og for dit valg af fokus i analysen.
- Diskutér betydningen af det gyldne snit i musikken, og sammenlign måden det gyldne snit anvendes i fagene matematik og musik. Eksempler fra andre anvendelsesområder må gerne indgå i diskussionen.

Hvor skal eleverne hen i gymnasiet?

Opgave 4 a) Reducér udtrykket

(10 point)

$$(a-b)^2 + 2a \cdot b.$$

Opgave 4 Der er givet udtrykket

$$(a-b)^2 + b \cdot (5a-b).$$

(10 point)

- a) Forklar nedenstående omskrivninger linje for linje. Brug bilaget.

Bilag vedlagt

Forklaring:

$$\begin{aligned} & (a-b)^2 + b \cdot (5a-b) \\ &= a^2 + b^2 - 2ab + b \cdot (5a-b) \\ &= a^2 + b^2 - 2ab + 5ab - b^2 \\ &= a^2 - 2ab + 5ab \\ &= a^2 + 3ab. \end{aligned}$$

Udtrykket er skrevet op

Hvor skal eleverne hen i gymnasiet?

Opgave 5 Et andengradspolynomium f er givet ved

$$f(x) = 3x^2 + 10x + 8.$$

(10 point)

a) Bestem $f(4)$.

Grafen for f er en parabel.

(10 point)

b) Bestem hældningen for tangenten til parabelen i punktet $P(0, f(0))$.

Opgave 2 Figuren viser grafen for et andengrads-polynomium f givet ved

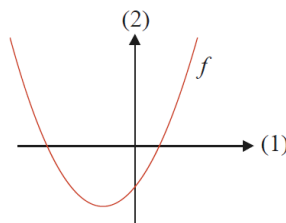
$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

(10 point)

a) Bestem fortegnet for hvert af tallene a og c .
Begrund svarene.

(10 point)

b) Bestem fortegnet for tallet b og fortegnet for diskriminanten d .
Begrund svarene.



Hvor skal eleverne hen i gymnasiet?

Opgave 8 En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4.$$

(10 point)

a) Tegn grafen for f .

(10 point)

b) Løs ligningen $f'(x) = 0$.

(10 point)

c) Bestem monotoniforholdene for f .

Opgave 8



Foto: www.colourbox.dk

I en model kan udviklingen i det årlige antal nedlagte råvildt i Danmark beskrives ved

$$f(x) = \frac{150000}{1 + 2,6 \cdot e^{-0,1x}},$$

hvor $f(x)$ angiver det årlige antal nedlagte råvildt til tidspunktet x (målt i antal år efter 1980).

(10 point)

a) Benyt modellen til at bestemme det årstal, hvor det årlige antal nedlagte råvildt var 120000.

(10 point)

b) Bestem væksthastigheden for det årlige antal nedlagte råvildt til tidspunktet $x = 40$.

Hvor skal eleverne hen i gymnasiet?

- *Redegørelse og dokumentation for metode*
Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte løsningsstrategi med dokumentation i form af et passende antal mellemregninger *eller* matematiske forklaringer på metoden, når et matematisk værktøjsprogram anvendes.
- *Figurer, grafer og andre illustrationer*
Besvarelsen skal indeholde hensigtsmæssig brug af figurer, grafer og andre illustrationer, og der skal være tydelige henvisninger til brug af disse i den forklarende tekst.
- *Notation og layout*
Besvarelsen skal i overensstemmelse med god matematisk skik opstilles med hensigtsmæssig brug af symbolsprog. Hvis der anvendes matematisk notation, der ikke hører til standardviden, skal der redegøres for betydningen.

Hvor skal eleverne hen i gymnasiet?

- *Formidling og forklaring*
Besvarelsen af rene matematikopgaver skal indeholde en angivelse af givne oplysninger og korte forklaringer knyttet til den anvendte løsningsstrategi beskrevet med brug af almindelig matematisk notation.
Besvarelsen af opgaver, der omhandler matematiske modeller, skal indeholde en kort præsentation af modellens kontekst, herunder betydning af modellens parametre. De enkelte delspørgsmål skal afsluttes med en præcis konklusion præsenteret i et klart sprog i relation til konteksten.

En teoretisk ramme for skriftlighed

- **Introducerende tekst:** Tekst der præsenterer opgaven og dens forudsætninger. I eksemplet er det centrale den funktion opgaven omhandler. Kravene til en præsentation af opgaven kan almindeligvis ikke opfyldes blot ved at skrive opgaveformuleringen af. En selvstændigt formuleret præsentation af opgaven forventes.
- **Forklarende tekst:** Tekst der forklarer hvordan spørgsmålet besvares. Det er centralt i besvarelsen af matematikopgaver, at man forklarer hvordan man besvarer opgaven. Hvilken strategi, hvilke værktøjer, hvilken tankegang ligger bag besvarelsen. Ofte fylder forklaringer ikke mere end en eller to sætninger, men de er helt centrale for indtrykket af besvarelsen.
- **Matematisk symbolsprog:** Brugen af matematiske symboler er helt central når en udregning eller en formel præsenteres og anvendes. Det matematiske symbolsprog skal anvendes omhyggeligt korrekt. Beregninger skal vises med passende mellemregninger og bør almindeligvis aldrig blandes sammen med almindelig tekst.
- **Konkluderende tekst:** Tekst der leverer det endelige svar på et spørgsmål. Almindeligvis forventes en konklusion, som ofte er en enkelt sætning med et præcist svar på det stillede spørgsmål. Til gengæld er der ingen særlig forventning om at svaret fremstilles med to streger under, yderst til højre i dokumentet eller tilsvarende.

En teoretisk ramme for skriftlighed

Skriv en fremstilling af besvarelsen af nedenstående fem matematikopgaver efter de kriterier der er beskrevet i noterne til modul 5. Opgaven er *ikke* kun at besvare spørgsmålet korrekt, men *også* at skrive en korrekt fremstilling.

Du skal i din besvarelse bruge forskellige farver tekst til at markere hvor teksten er *introducerende*, hvor den er *forklarende* og hvor den er *konkluderende*. Endvidere skal du markere de steder hvor der anvendes *matematisk symbolsprog*.

Du skal også anvende figurer de steder hvor det er oplagt. Figurer kan f.eks. være lavet med Nspire eller tegnet på papir og overført til afleveringen med et kamera. Du skal også bruge indklip fra Nspire til at dokumentere din brug af programmet.

En teoretisk ramme for skriftlighed

Opgave 2 En lineær funktion $f(x) = a \cdot x + b$ har en graf som går gennem punkterne $P(x_1, 5)$ og $Q(10, 13)$.

(10 point) a) Bestem a og b når $x_1 = 6$.

(10 point) b) Bestem x_1 så $a = -\frac{1}{4}$.

En teoretisk ramme for skriftlighed

Opgave 2

En lineær funktion $f(x) = a \cdot x + b$ har graf gennem $P(x_1, 5)$ og $Q(10, 13)$.

a)

For $x_1 = 6$ fås punkterne $P(6, 5)$ og $Q(10, 13)$. Dermed kan a bestemmes med topunktsformlen:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{13 - 5}{10 - 6} = \frac{8}{4} = 2$$

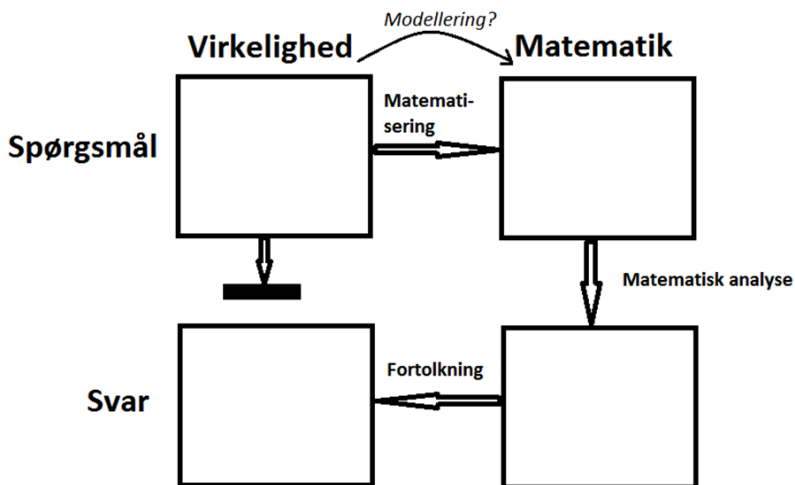
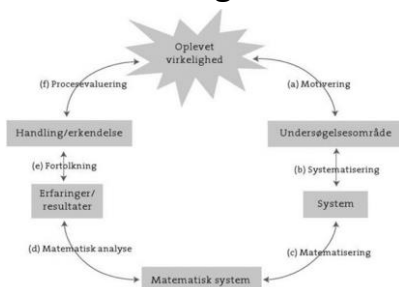
Derpå kan b bestemmes: $b = y_1 - a \cdot x_1 = 5 - 2 \cdot 6 = 5 - 12 = -7$

Det er altså bestemt at for $x_1 = 6$ fås $a = 2$ og $b = -7$

En teoretisk ramme for skriftlighed

Modelanvendelse

Modellering:



En teoretisk ramme for skriftlighed

Spørgsmål

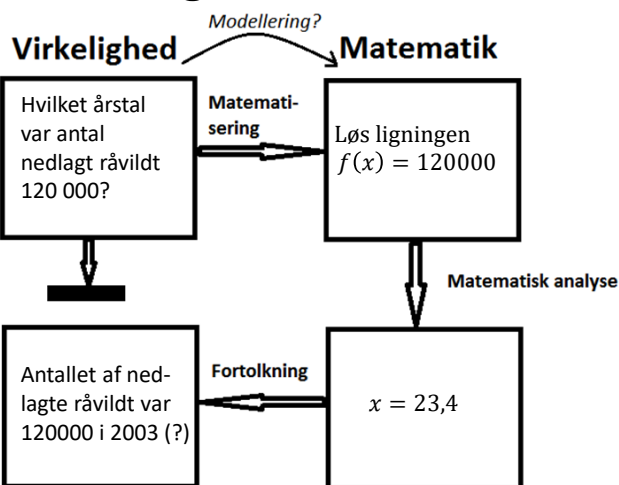


Foto: www.culorbat.dk

I en model kan udviklingen i det årlige antal nedlagte råvildt i Danmark beskrives ved

$$f(x) = \frac{150000}{1 + 2,6 \cdot e^{-0,1x}}$$

hvor $f(x)$ angiver det årlige antal nedlagte råvildt til tidspunktet x (målt i antal år efter 1980).

a) Benyt modellen til at bestemme det årstal, hvor det årlige antal nedlagte råvildt var 120000.

En teoretisk ramme for skriftlighed

Opgave 8

I en model beskrives udviklingen i nedlagt råvildt i Danmark med $f(x) = \frac{150000}{1+2,6 \cdot e^{-0,1 \cdot x}}$, hvor $f(x)$ er antal nedlagte råvildt i Danmark til tidspunktet x målt i antal år efter 1980.

a) **10 point**

For at bestemme det årstal hvor antallet af nedlagte råvildt var 120000 sættes $f(x) = 120000$ og denne ligning løses for x med Nspire:

$f(x) := \frac{150000}{1+2,6 \cdot e^{-0,1 \cdot x}}$	Udført
$\text{solve}(f(x)=120000, x)$	$x=23.4181$

Løsningen på ligningen er $x = 23,4$.

Ifølge modellen var antallet af nedlagt råvildt i Danmark 120000 i 2003.

En teoretisk ramme for skriftlighed

En god besvarelse af en matematikopgave har tydelige skift i rækkefølgende:



Eksempler fra ny-startet 1.g-elev



Eksempler fra ny-startet 1.g-elev

Opgave 1: a) $9x+13=40$	$9x+13=40$ $9x+13-13=40-13$ $9x=27$ $\frac{9x}{9}=\frac{27}{9}$ $x=3$	$x=3$
b) $20-6x=8$	$20-6x=8$ $20-20-6x=8-20$ $-6x=-12$ $\frac{-6x}{-6}=\frac{-12}{-6}$ $x=2$	$x=2$
c) $20x-6=9-10x$	$20x-6=9-10x$ $20x-6+6=9-10x$ $20x+10x=15$ $\frac{30x}{30}=\frac{15}{30}$ $x=0,5$	$x=0,5$
d) $\frac{3x-9}{6}=5$	$\frac{3x-9}{6}=5$ $\frac{3x-9}{6} \cdot 6 = 5 \cdot 6$	$x=13$

Eksempler fra ny-startet 1.g-elev

Opgave 1:

$$\begin{aligned} \text{A)} \quad & 9x+13=40 \\ & 40-13=27 \\ & 9/27=3 \\ & x=3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{B)} \quad & 20-6x=8 \\ & 20-8=12 \\ & 12/6=2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{C)} \quad & 20x-6=9-10x \\ & 9+6=15 \\ & 20x+10x=30x \\ & 30x=15 \\ & 15/30=0,5 \end{aligned}$$

Eksempler fra ny-startet 1.g-elev

$$x^2=4*9$$



$$\sqrt{x^2} = 4 \cdot 9 = 6$$

Eksempler fra ny-startet 1.g-elev

Opgave 4

En kirke er bygget i et grundform af en rektangel med en halvcirkel med radius r , se

- Opstil en ligning for arealet ved radius r (bogens længde er 3,14 gange radius)
- Hvad er arealet af facaden (modsat halvcirkelen)?
- Hvor lang skal den rektangulære del være, så arealet skal være 50m^2 ?

OPGAVE 4

opgave A

$$= (r^2 * 3,14 * 0,5) + (a * a) = A$$

opgave B

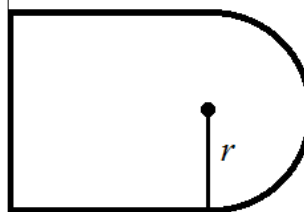
$$= 10 * 10 = 100$$

$$10^2 * 3,14 = 314$$

$$\underline{\underline{314 + 100 = 414}}$$

Opgave c

$$= \text{Kvrod } 50 = \underline{\underline{7,07}}$$



areal skal være 50m^2 ?

WORKSHOPS: Tre diskussioner om skriftlighed

1. ERFARINGER!

SKOLE: Kan I genkende de elever I sender afsted, i de elever jeg modtager?

GYM: Kan I genkende de elever jeg modtager?

2. PROBLEMER!

Hvilke udfordringer vil man på hver side af "overgangen" opleve med at forsøge at løse skriftligheds-udfordringen?

3. LØSNINGER!

Kan I bruge den skitserede teoretiske ramme for skriftlighed til at "udjævne" overgangen, og hvordan vil I i så fald gøre det?