

## Elever i matematik-vanskeligheder Hvad – hvorfor og hvordan



1

## Når der skal hovedregnes

-1	-2	-3	-4
0	1	2	3

- Klip talkortene ud så I hver især har et sæt
- Spil sammen to og to
- Træk på skift hos hinanden.
- For regnskab **for hvert træk** med hvor mange point i har på hånden
- Spil i 3 minutter

2

Bent Lindhardt - 2023

## Den menneskelige lommeregner



Bent Lindhardt - 2023

3

## En startopgave

Udgangspunktet er

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

og **alle** fire regningsarter + en ekstra

Tallene må bruges en gang og alle skal indgå i følgende resultater.

17 2 21 3 2

10 14 1 20 16

2 2 2 2 9



4

Bent Lindhardt 2023

## Resultater

- $9 + 8$        $10 : 5$        $7 \times 3$        $1 + 2$        $6 - 4$
- $10 : 1$        $8 + 6$        $3 - 2$        $5 \times 4$        $9 + 7$
- $10 : 5$        $1 \times 2$        $9 - 7$        $8 : 4$        $6 + 3$

5

Bent Lindhardt 2023

## Sammenligning ...



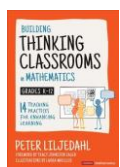
Passer pris og den mængde  
the man kan have i poserne?

6

Bent Lindhardt 2023

## Det tænkende klasselokale

Spørgsmål til undervisningen	Det optimale svar
Hvilke opgavetyper skal jeg bruge?	Brug undersøgende spørgsmål
Hvilken arbejdsform er bedst?	Grupper af 3 - tilfældigt udvalgt
Hvor skal de være når de arbejder?	Ved vertikale viskbare "tavler"
Hvordan skal klasselokalet arrangeret	Fjern centrum ved "lærertavlen"
Hvordan skal der stilles spørgsmål	Svar kun med fortsat tænkende spørgsmål
Hvordan skal opgaven præsenteres	Iscenesæt den stående og verbal



7

Bent Lindhardt 2023

## Hvem er de? .....



8

Bent Lindhardt 2023

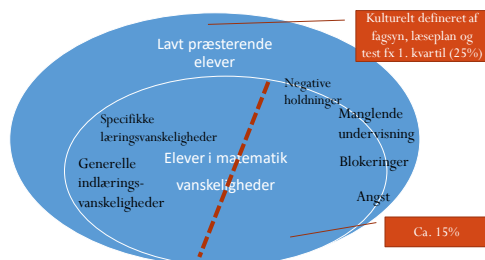
## Hvor langt kommer de fagligt?

- De 15% dårligst præsterende i 9. klasse Medelsta kommune i Sverige – undersøgt tre gange med en del års mellemrum – havde et præstationsniveau som middelgode elever i 4. klasser
  - Medelsta rapporten



9

## En oversigt



10

Bent Lindhardt 2023

## Årsagsforklaringer

- En neurologisk vinkel
- En psykologisk vinkel
- En sociologisk vinkel
- En didaktisk vinkel



11

Bent Lindhardt 2023

## Elevens egne barrierer



Bent Lindhardt - 2023



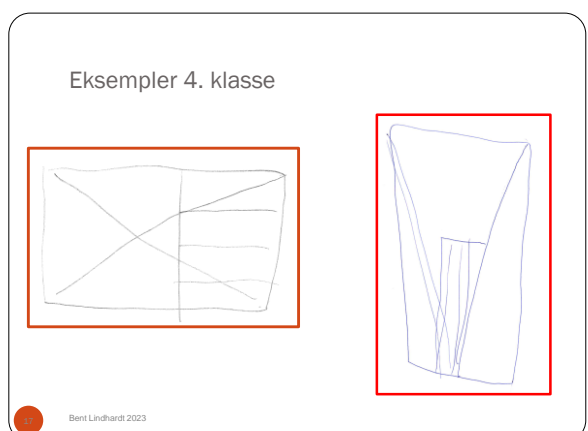
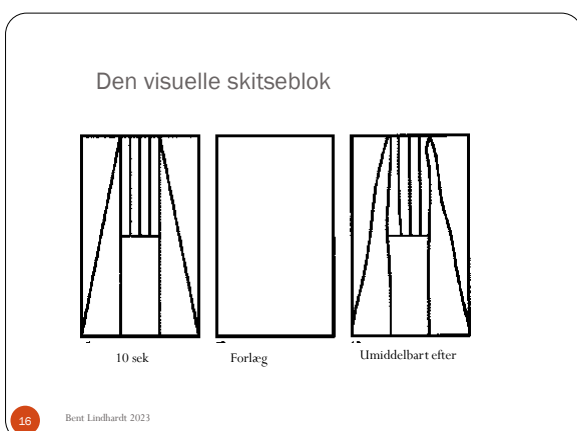
Cifferspændvidden

**Den fonologiske sløjfe**

- 2
- 4 7
- 5 4 9
- 7 1 3 8
- 3 5 8 2 9
- Osv op til ni cifre

• Cifrene udtales på en gang med ca.  $\frac{1}{2}$  pulsslags mellemrum og straks efter gengives på papir af den der testes.

14 Bent Lindhardt 2023



## Arbejdshukommelse

- Arbejdshukommelsens aktivitet er tænkning
- Arbejdshukommelsen, som betegner mødet mellem kort- og langtidshukommelsen, er et udtryk for, hvor megen information og hvor mange tanker vi kan være bevidst om samtidigt - hvor mange bolde vi kan have i luften - og vores forarbejdningskapacitet.
- Arbejdshukommelse beskriver en aktiv fastholdelse og håndtering af information fra den visuelle skitseblok og den fonologiske sløjfe
- Der inddrages den såkaldte "eksekutive funktion" - - - planlægningsevnen sidder i frontallapperne
- Prøv selv med bogstaver.

18

Bent Lindhardt 2023

## Bemærk om eleven udviser

1. En bemærkelsesværdig lille vedholdenhed
2. Vanskelighed ved at begynde på og afslutte en opgave
3. Vanskelighed med at få overblik, at fuldføre og "have flere bolde" i luften.
4. Mangel på fokusering og at udelukke forstyrrelser
5. Langsomt lærende
6. Kan være noget tilbagetrukket i undervisningen

19

Bent Lindhardt 2023

## Mange programmer undervejs

MV-NORDIC

### Hukommelsesleg FlexOnline

<https://ar.pinterest.com/pin/446700856771204098/>



Med og uden internet til:

- ✓ Spillemotor
- ✓ Spillemotor
- ✓ Spillemotor
- ✓ Spillemotor
- ✓ Spillemotor
- ✓ Spillemotor
- ✓ Spillemotor
- ✓ Spillemotor
- ✓ Spillemotor
- ✓ Spillemotor



<https://www.youtube.com/watch?v=3j-Pujkqekq0>

20

Bent Lindhardt 2023

## Lagring i langtidshukommelsen

- Tunge forestillinger er "tungt lastet med" problemirrelevant og/eller problemunødvendig information.
- "Lette forestillinger" har frigjort sig fra problemirrelevant og problemunødvendig information og er "let" lastet med problemrelevant information



Virkeligheden kan afsætte irrelevant støj på erindringen



22

Bent Lindhardt 2023

## Arbejdshukommelse

- Arbejdshukommelsen, som betegner mødet mellem kort- og langtidshukommelsen, er et udtryk for, hvor megen information og hvor mange tanker vi kan være bevidst om samtidigt - hvor mange bolde vi kan have i luften - og vores forarbejdningskapacitet.
- Arbejdshukommelse beskriver en aktiv fastholdelse og håndtering af information fra den visuelle skitseblok og den fonologiske sløjfe
- Der inddrages den såkaldte "executive funktion" - - - planlægningsevnen siddende i frontallapperne
- Prøv selv med bogstaver.

23

Bemærk om eleven udviser

- En bemærkelsesværdig lille vedholdenhed
- Vanskelighed ved at begynde på og afslutte en opgave
- Vanskelighed med at få overblik, at fuldføre og "have flere bolde" i luften.
- Mangel på fokusering og at udelukke forstyrrelser
- Langsomt lærende
- Kan være noget tilbagetrukket i undervisningen

## Konsekvenser for undervisningen

- Rammer og struktur betyder noget – for mange forandringer forvirrer
- "notat" papir til at være arbejdshukommelsens forlængede arm
- Beskeder/information må ikke være for lange og for indviklede
- Hjælp til at "skære en opgave" ud i mindre sekvenser.
- Behov for mange gentagelser
- Klarhed i "hvad man skal".

25

- *Jeg hørte dig på radioens P1 idag, emnet var talblindhed eller problemer generelt omkring matematik. Jeg er en 42 årig kvinde, som aldrig rigtig er kommet ind på arbejdsmarkedet, grundet dette 'handicap', for egentlig har jeg aldrig mødt forståelse for mit 'lille' problem. Jeg har nu som voksen, accepteret, at det er en del af mig, som jeg bare må leve med. Jeg kan nikke genkendende til det udsagn med, at man må være dum, hvis man ikke er god til tal. Jeg lærte f.eks. klokken sent, og panikkede hvis nogen spurgte til tiden. Den lille tabel har heller aldrig fundet permanent plads i min hjerne ( det er svært, at finde et system, at huske den på ). Har også måtte skippe jobs på denne konto, fordi jeg ikke kan modregne ved pengetransaktion. Jeg vil spørge dig, hvor kan jeg henvende mig, så jeg kan få lidt styr på, hvad problemet er i mit tilfælde, og dets omfang. Jeg har brugt 2 cifrede ( 2000 kr. ? ) beløb hos en hypnotisør, men uden resultat. Hun mente ikke jeg var talblind, men at problemet var linket op til socialfobi. Jeg tror selv, at det er begge dele, som spiller ind.*



ikke mailafsender

26

## Har svært ved at huske tal og cifre

- *.... jeg har udviklet mit eget talsystem, så tallene ikke hedder 1, 2, 3, 4, 5 og så videre. De hedder fiskekrog, liggestol, siddestol, træ, svane, derudaf. Og så regner jeg med dem. Og det er også den måde jeg husker tal på, jeg husker rigtig godt pinkoder og jeg har ikke noget problem med at få nye pinkoder, jeg sætter bare svaner og fiskekroge ind i stedet for. Og så har jeg en teknik med, når jeg skal huske lange tal eller nye pinkoder. At jeg kigger på dem i lang tid, kigger væk, kigger på dem igen, kigger væk, siger dem højt nogle gange, siger dem inde i mit hoved nogen gange, omkoder dem til mine egne ord og mine egne figurer og så kan jeg huske det.*

27

## Har svært ved ordning af tal og aflæse tal i skemaer

- *Du kender det der med at trække et nummer på et apotek, når man står i kø. Det er noget af det værste. Det er sådan ligesom bankospil med de der numre. Jeg er altid spændt på om det er min tur næste gang!*
- *Jeg kan selvfølgelig heller ikke læse busplanerne, men jeg står bare og venter på at bussen kommer på et tidspunkt ellers så går jeg. Det er sådan, ehm*

28

## Har særlig svært ved at regne selv simple regnestykker i hovedet

- *Jamen, altså jeg kan... altså De mest simple  $5+5$  og  $2+2$ . Og så regner jeg på mine fingre og hvis jeg ikke har flere fingre tilbage så kan jeg bare ikke mere.*
- *Altså jeg tæller også på fingrene. Men hvis jeg får sat nogle minusstykker og plusstykker op, så kan jeg være heldig at jeg kan dem. Hvis det fx er alt under fem så kan jeg nok godt, men det er ikke sikkert at jeg kan fra 6 og op. Det kan jeg slet ikke, det forstår jeg ikke. Og gange, jeg kan være heldig der måske er noget med fem i og det kan jeg godt. Altså den her fem ti femten. Øhm..*

29

## Anvender "konsekvent" tælling ved antalsbestemmelse

- *Jeg bruger mine hænder, jeg kan tælle til mere end mine hænder, fordi jeg også har mine fødder og er benene overkors så er jeg nået til tyverne og gør jeg sådan her er jeg i trediverne (har armene krydset), gør jeg sådan her er jeg i fyrreerne (læner sig tilbage i stolen)*
- *Jeg bruger også fingrene ..... Jeg laver sådan nogle små streger simpelthen for at kunne følge med i, hvad jeg laver. Hvis det er sådan noget på papir og sådan noget.*

30

## Har problemer med at etablere og huske regneprocedurer

- *... Hvis jeg så lægger det væk og tager det frem ugen efter, så kigger jeg på de her minusstykker og tænker, gad vide hvad jeg skal. Som om jeg ikke har set det før og det er selvfølgelig det samme med plus og dividere og bare generelt med matematik. Jeg kan godt plusse og minusse, sådan på papiret.*
- *....Så på den led har jeg lidt svært ved det. Men jeg kan godt. Som regel kan jeg godt øhh matematikken i det, hvis man kan sige det sådan, jeg kan bare ikke regne det.*

31

## Svært at aflæse tid og fornemme tidslængde

- *Jeg kører også bil og jeg har det med, også med ure apropos, med P-skiven når den skal stilles. (griner) Der er kun én viser frem for to lige pludseligt. Og det gør det ikke bedre, og P-skiven er jo spejlvendt inde i bilen*
- *Det var det jeg lærte sidste, for jeg blev forvirret af alle stregerne og jeg kunne slet ikke finde ud af hvad jeg skulle bruge alle de her mellemstreger til. Så når de var væk så skulle jeg kun koncentrere mig om hvor viserne gik hen.*

32

## Er retningsforstyrrede

- *Ja. Jeg kan heller ikke højre og venstre. Det er et problem når man danser*
- *... det med højre og venstre, det har jeg også meget svært ved, hvorfor jeg har fået lavet nogle tatoveringer (en stjerne og et får) på mit håndled. Som gør at jeg ved at højre er stjerne og venstre det er får. Så når jeg er ude og køre bil, og folk siger højre og venstre, så kan jeg kigge ned på mine håndled og navigere efter det.*
- *Jeg kan heller ikke finde vej, når jeg går ud af min lejlighed, så ved jeg ikke hvor jeg er. Jeg ved bare at hvis jeg går til... (kigger på sit håndled) højre, så ved jeg bare at jeg går væk fra byen mod Fakta. Altså jeg ved at Fakta er væk fra byen og Lidl er ind mod byen.*

33



### Har svært ved at overskue pengebeløb og mønter/sedler

- *Jeg handler sådan lidt i blinde og giver min kæreste bonnen når jeg kommer hjem.*
- *Eh, jeg kan ikke se forskel på nullerne, så jeg ved ikke om jeg betaler med en 100 kroneseddel eller en 1000 kroneseddel, det ved jeg kun på farverne på sedlerne.*
- *Altså jeg bruger altid kun mit Dankort. Jeg bruger aldrig kontanter, aldrig nogensinde*

34

### Har svært ved at anvende og bedømme størrelser

- *Nej. Jeg ville ikke lige vide hvor langt 10 meter sådan lige var.*
- *Jeg bryder mig ikke særligt om at lave mad og jeg holder fra bagning. Kilogram og sådan det. Det holder jeg mig fra.*
- *Jeg er også blevet spurgt hvor højt der er til loftet, ej. Det kan jeg heller ikke. Også med vægte det kan jeg heller ikke, med gram og, det er nej. Det kan jeg ikke.*

35

## Definition

- Talblindhed/dyskalkuli er en læringsudfordring, der er påvirket af en neurologisk udviklingsforstyrrelse, som kan have forskellige udtryk men som ikke kun kan forklares på baggrund af generelle indlæringsvanskeligheder, mangelfuld undervisning, psykologiske eller sociologiske årsager.
- Talblindhed/dyskalkuli omfatter vanskeligheder ved at automatisere tal, antal og størrelser samt fastholde og anvende aritmetiske færdigheder.

36

## Omgivelsernes negative påvirkning



42

## Et anstrengt forhold til matematik

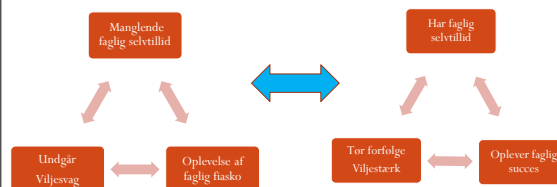
*Jeg hader matematik, og det gør mig så rasende, så jeg kommer op at skændes med lærerne. ... De prøver at forklare, men jeg fatter ikke, hvad de siger, og til sidst går jeg min vej..."*

- Specialpædagogik nr. 2 2008



43

## Fra negativ til positiv læring – og omvendt



44

## Særligt typiske synspunkter hos matematikængstelige

- "I matematik er der altid ét korrekt facit" (og dermed mange forkerte)
- "Når du er hurtig, er du god til matematik" (tidspres)
- "Når du er god til matematik, er du klog" (følelse af at være dum)
- "For at finde frem til det korrekte facit, skal du kende den rigtige metode" (jo bedre du husker procedurer, jo hurtige kan du finde det rigtige facit.)
- "Hvis du ikke er lige så god/hurtig som dine kammerater, er du ikke lige så klog" (frygt for at fejle)

45

Bent Lindhardt 2023

## Mona Røsselund

- Norsk Masteropgave
- Udvalgt 8 elever fra realskolen som scorer betydeligt lavere end på grundskolen.
- Observation af undervisning og interview.



46

Bent Lindhardt 2023

### Om elevernes selvpfattelse

Fund fra analysen viser at det er særlig tre faktorer som påvirker elevernes identitet som matematiklærende;

- følelsen af manglende mestring,
- tab af tro på egne evner
- forestillingen om at faget ikke har betydning for dem hverken nu eller i fremtiden



47 Bent Lindhardt 2023

### Engelske elever

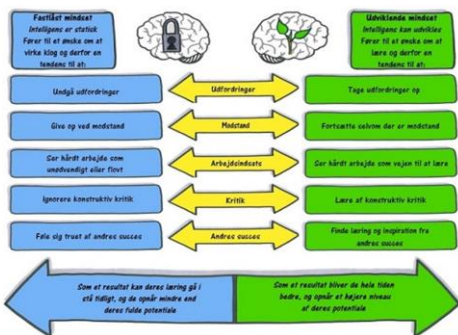
- Et flertal af engelske udskolingselever med høj matematikangst beskrev, at deres angst voksede, når deres **opgaver blev sværere ...**
- Det omfattede også mange som oplevede forvirring ved at blive **undervist af flere lærere, frygt for at blive hånet af kammerater og at ikke at føle sig "klar" til det**, de opfatter som hårdere arbejde på "næste trin".



Emma Carey, et. al., "Understanding Mathematics Anxiety: Investigating the experiences of UK primary and secondary school students," Centre for Neuroscience in Education, University of Cambridge (March 2019).

48 Bent Lindhardt 2023

### De to Mindset



49

### ... men hvad gør vi så



Det kaldes på overvejelser om valg af fagligt indhold, om læringseffekt, organisationsformer og personlige/relationelle forhold. Der er næsten ingen forskning omkring det her fordi der er stor uenighed om afgrænsningen af elever med dyscalculi

51 Bent Lindhardt - 2023

## Et par nedslag



Bent Lindhardt 2023

53

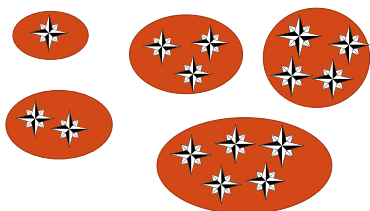
## (Peer tutor) - matematiktutor

- Matematiktutor i samme alder anbefales.
- Mest succesfuld var en kortere varighed af vejledningsprogrammer (mindre end 8 uger), sessioner på mindre end 30 minutter og tre eller færre matematiktutorsessioner om ugen foreslås også. Forbedringer kan findes uanset elevernes indlæringsevner.
- Nyeste forskning viser, at kollaborative arbejdsformer har en signifikant og positiv effekt på elevernes læring. Effekten er størst i forhold til elevernes læring, når disse tiltag består af elevernes feedback til hinanden, elevernes evaluering af sig selv, af elever der underviser hinanden eller elever der, som organiseret del af undervisningen støtter hinanden.

54

Bent Lindhardt 2023

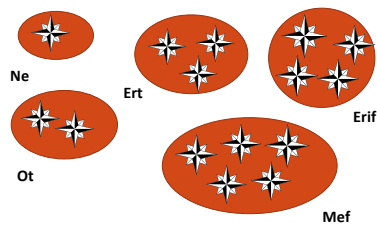
## Kommunikationen i klasselokalet



55

Bent Lindhardt 2023

## Kommunikationen i klasselokalet



56

Bent Lindhardt 2023

## Mener vi det samme?

Tænk på

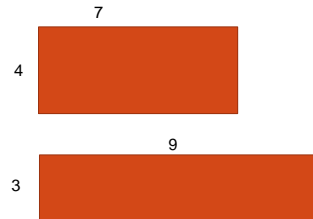
1. Et transportmiddel
2. Der kan være mange mennesker med
3. Det er motordrevet
4. Det bevæger sig på hjul

Beskriv, det for din makker

57

Bent Lindhardt 2023

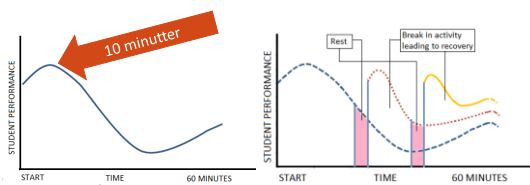
## En samtale om areal



58

Bent Lindhardt 2023

## Opmærksomhedskurve for en lektion

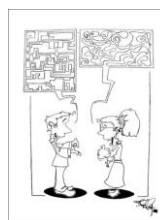


Bligh "Whats use for a lectures"

59

Bent Lindhardt 2023

## Learning by talking



Min forskning er helliget studiet af menneskets tænkning i almindelighed og matematisk tankegang i særdeleshed.

... sammenfattet i begrebet *kommunikation*, som kombinerer kommunikation med kognition

Det er i den verbale samtale (både den indre og ydre stemme) at man som menneske bliver klogere.

60

Bent Lindhardt 2023

## Mange elever mangler gode arbejdsvaner

1. Gæt og prøv
2. Brug hjælpemidler
3. Se efter et mønster
4. Gør opgaven enklere
5. Arbejd "baglæns"
6. Arbejd systematisk
7. Brug modeller til overblik
8. Tegn/skitser det



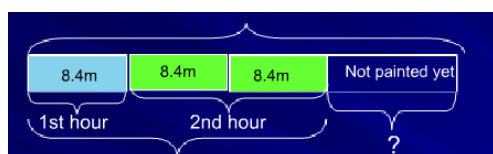
"En maler skal male en væg, som er 35 m lang.  
Hun malede 8,4 m den første time og dobbelt  
så langt i den anden time.

How many meters are left to be painted?"



Beit Lindhardt 2022

05-10-2023



## Tre opgavesøjler som kunne styre vidensindholdet

ABSALON

Opgaver med fokus på forståelse af relevante matematiske sammenhænge og begreber - Kun få begreber	Opgaver med fokus på anvendelse (viden, færdigheder) i centrale erhvervsrelevante kontekster - ofte flere begreber	Opgaver med anvendelse i hverdagsproblemstillinger og i kritisk forholden sig til samfundsmæssige problemstillinger - ofte flere begreber
Hvorfor er arealet for en trekant $\frac{1}{2} \cdot h \cdot g$ .	Overslag ved måling og beregning	Lån af forskellige slags
Hvorfor er $0,7 = 70\%$	Afsætte vinkler med ...	Prissammenligninger
Hvorfor er $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3$ ?		Fake news – hvad er op og ned
Hvorfor er $6 : \frac{1}{2} = 12$		
Hvorfor er blandingsforholdet $1 : 3$ det samme som $\frac{1}{4}$ og $\frac{3}{4}$ ?		
Hvorfor er ...		

65

## Kende til mulige misopfattelser

- Misopfattelser er ufuldstændige tanker knyttet til et begreb. De er til en vis grad unikke og dermed forudsigelige.

Der gælder de samme regneregler for alle regningsarterne

- Hvis  $12 + 7 = 7 + 12$  så gælder også at  $12 - 7 = 7 - 12$

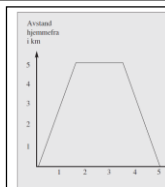
Det længste tal er det største tal.

- 3267 er større end 54 - så er 32,67 også større end 546.

Når man dividerer blive resultat altid mindre

66

Best Lindhardt 2023



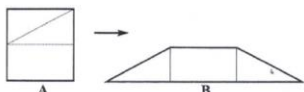
Grafen framstiller en fottur.  
Fortell med egne ord hva grafen forteller om turen.

I løpet av en time hadde vi gått 2,5 km da vi hadde gått 2 timer var vi på toppen da hadde vi gått bare oppover. Nå sykkle vi 2 km på bare stulle. Etter en stund begynte nedstigninger fra toppen etter 2 timer var vi nede igjen og da var vi slite. Så endte fotturen!

68

### Opgave 15

Firkant A deles op i tre stykker. De sættes sammen så der kommer en ny figur B.



Sæt kryds ved de rigtige udsagn.

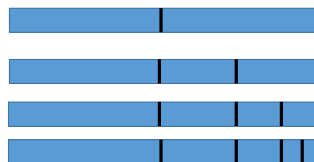
- Arealet af A er større end arealet af B
- A og B har et lige stort areal.
- Arealet af B er større end arealet af A
- Man kan ikke sige hvilket areal som er størst.

Opgave	Ubesvaret	A = B	A > B	B > A	Man kan ikke sige hvilket areal der er størst	Andet svar
N = 218	10	160	18	26	11	0
Procent	5%	73%	8%	12%	5%	0%

69

Best Lindhardt 2023

## Modeller er vigtige



## Dobbelte tallinjer

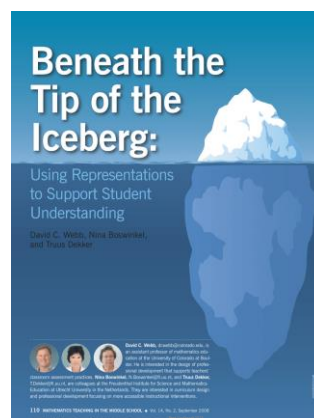
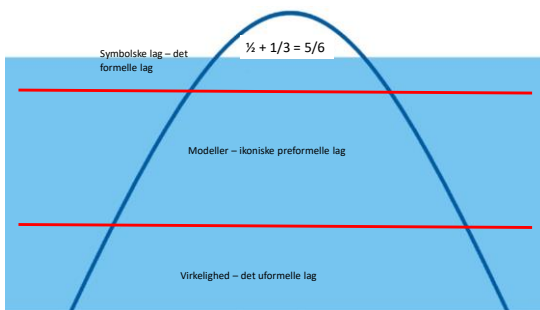
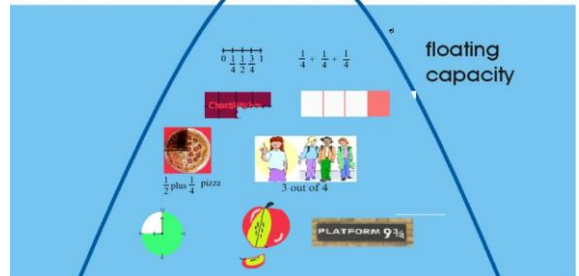
- Hvad er 5% af 320 kr.?



formal notations

$$\frac{3}{4}$$

top of the iceberg





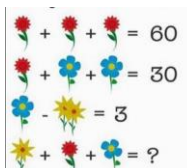
### Noget blokerer når det bliver bogstaver

			28
			45
	31		

a	b	a	28
c	c	c	45
b	b	c	
	31		

78 Best Lindhardt 2023

### Et trin på vejen til ligningsløsning



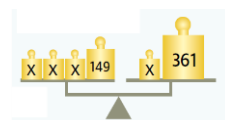
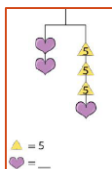
Man kan konstatere at når man anvender "figurative" repræsentationer for den ukendte er der flere elever som ligningsløser end hvis samme abstrakte udtryk blev beskrevet med bogstaver

Det kan også være "hullet" i en beregning

3	+		=	8
	+	7	=	9

79 Best Lindhardt 2023

### Eksempler på "ligevægtsopgaver"



80 Best Lindhardt 2023

### En EUD E-niveau

**Opgave 25**

Løs ligningerne:

a)  $8x = 24$       b)  $250 = 6x + 10$       c)  $3x + 7 = 5x + 3$       d)  $\frac{2}{3}x = 12$

Vis din løsning her.

A  $8 : 24 = 3$

B  $250 - 10 : 6 = 40$

~~C  $3x + 7 = 5x + 3$~~

D  $\frac{2 \cdot 12}{3 : 12} = 6$

$3 \cdot 2 + 7 = 5 \cdot 2 + 3$

81 Best Lindhardt - vebside 2022

## Se tallene i sammenhæng

Anvendelse af autentisk materiale – selv formulere spørgsmål

The image shows a menu with various food items and prices. A hand is pointing at the 'Pasta' section, which includes items like 'Santitas i en god kvalitet' and 'Dressingen er sød og cremet'. The menu is placed on a red and white checkered tablecloth.

82

Bent Lindhardt 2023

## Erkendelse af enheder



Hvor lang er 1 kilometer

Hvor lang tid er 1 minut?



Opøve estimering – at turde gøre det



- Der er forskel på
  - Hvor mange ... ?
  - Hvor meget ... ?



83

Bent Lindhardt 2023

## Kompenserende hjælpemidler

- Vi skal overveje hvor meget som kan klares af kompenserende hjælpemidler – eller snarere hvilke færdigheder kan man ikke udføre ved brug af hjælpemidler?



84

Bent Lindhardt - 2023

## Nogle mulige nedslag

- En mere fejllacperende kultur
- Det er eleven som skal arbejde ikke læreren
- Oplevelsen af mening
- Formativ evaluering (indsigt i deres misopfattelser)
- Varieret undervisning
- Forskellig stilladsering fx reducere for mange bolde i luften og hjælp til opsamling
- Tillid og samtale i fx makkerpar
- Tid til at lære langsomt og ro til ikke at lade sig aflede
- Klarhed i rammer og forventninger
- Bruge resonanseffekt - lille succes stor effekt
- "Success historier" - resonanseffekten
- Åbne opgaver gør fælles