

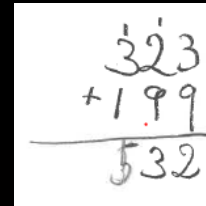
Regnestrategier

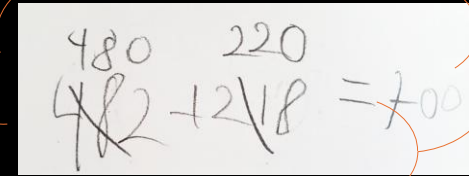
Fleksibilitet og adaptivitet

Elever i matematikvanskeligheder

Den årlige nationale
Konference for matematiklærere på EUD/EUX 2025
14. september 2025

Lóa Björk Jóelsdóttir, docent, PhD, VIA University College
Forskningscenter for didaktik og pædagogik /
Forskningsprogram for Matematikdidaktik


$$\begin{array}{r} 323 \\ + 199 \\ \hline 522 \end{array}$$


$$\begin{array}{r} 480 \\ - 220 \\ \hline 260 \end{array}$$



Dagsorden

1. Regnestrategier og fleksibilitet
 - Danske elevers regnestrategier
 - Fleksibilitet og adaptivitet
2. Regnestrategier og elever i matematikvanskeligheder
3. Fleksibilitet og repræsentationer (Ligningsløsning)
4. Opsamling: Udfordring og potentialer

The image shows handwritten mathematical work on a white background. It illustrates a strategy for calculating 18×14 by breaking down the numbers into tens and units. The work is organized into two columns. The left column shows the breakdown of 18 into three groups of 10 and 8, and then 8 into two groups of 4. The right column shows the breakdown of 14 into three groups of 10 and 4, and then 4 into two groups of 2. The final result, 260, is underlined.

$$\begin{array}{r} 18 + 18 + 18 + 18 + 18 + \\ 18 + 18 + 18 + 18 + 18 + \\ 18 + 18 + 18 + 18 + 18 + \end{array} \quad \begin{array}{r} 36 + 36 + 36 + 36 \\ 36 + 36 + 36 \\ 72 + 72 + 72 \\ 144 \\ 126 \end{array}$$

54

260

Baggrund



- Uddannet folkeskolelærer i 1997.
 - Matematik og musik
- Diplom i matematik og matematikdidaktik
- Cand.pæd matematikdidaktik (DPU, 2009)
- Ph.D. Aarhus University. Institut for økonomi (Trygfondens Børneforskningscenter)

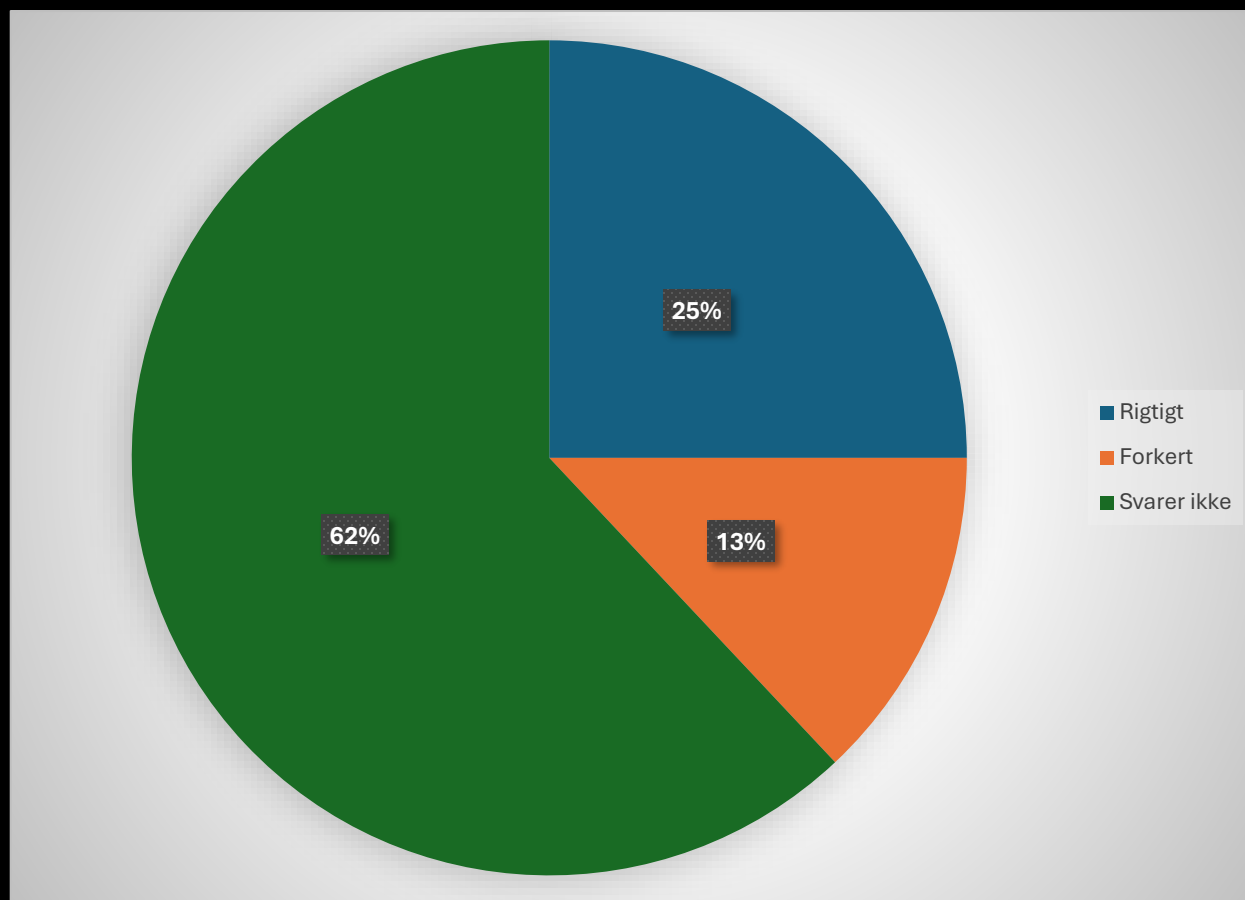
Adaptivity and Flexibility in multidigit arithmetic

- Folkeskoleskolelærer i 10 år (1997-2007)
- Læreruddanner fra 2009
- *Medlem af ekspertgruppen FOMAVA (Forum for matematikvanskeligheder)*

Hvordan
løser du
opgaven?

$$\frac{9}{10} : \frac{3}{10}$$

57 matematiklærerstuderende (1. årgang – uge1)



- Fejlsvar

- $\frac{3}{10}$ og 0,3

$$\frac{9}{10} : \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$$

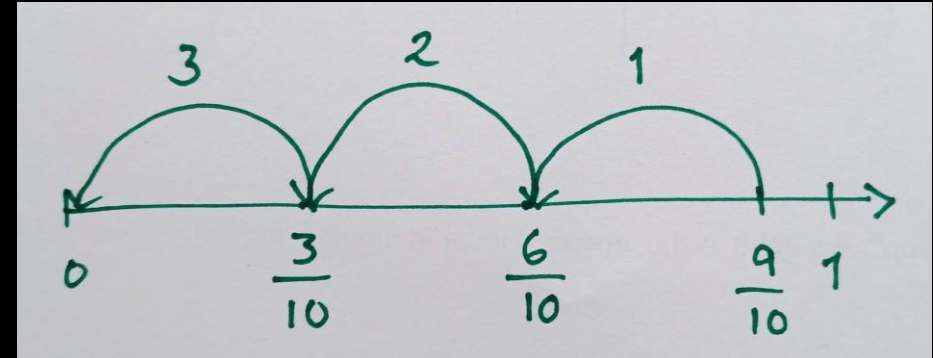
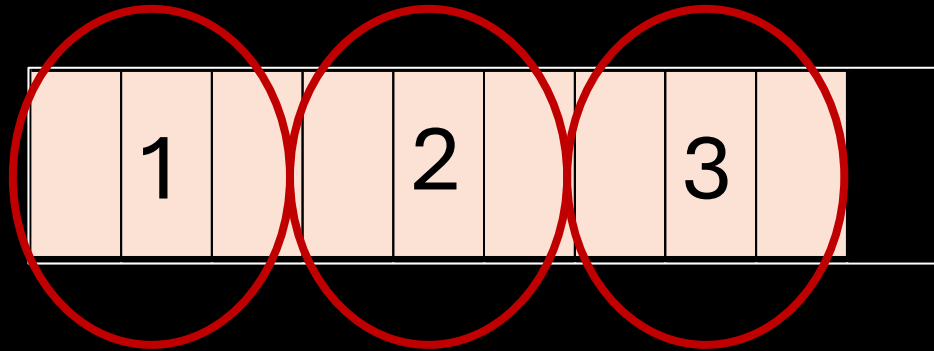
Divider begge tal

- 0,27

Divider de 2 tal i tallet
Da nævner er ens

$$\frac{9:3}{10} = \frac{3}{10} \neq 0,3$$

Løsningsforslag



Vender den
bageste brøk
og ganger
tallene
sammen

$$\frac{9}{10} \cdot \frac{10}{3} = \frac{90}{30} = 3$$

Fællesnævner, der for

$$9 \div 3 = \underline{\underline{3}}$$

Prøven uden hjælpemidler: 9. klasse maj 2024

$$2 : \frac{1}{2} =$$

22% of eleverne har svaret rigtigt

	De fire hyppigst afgivne fejlsvar	Antal elever der har afgivet fejlsvaret	Andel elever der har afgivet fejlsvaret i forhold til alle elever	Andel elever der har afgivet fejlsvaret i forhold til alle afgivne fejlsvar
Opgave 10.3 14.084 (22 %) af eleverne har besvaret opgaven korrekt. 46986 elever har afgivet et fejlsvar i delopgaven og 4019 elever har ikke afgivet et svar.				
	1/4	10055	15 %	21 %
	1	7245	11 %	15 %
	0,25	7223	11 %	15 %
	1/2	2500	4 %	5 %

Prøven maj 2024 – uden hjælpemidler

Instrumentel og relationel forståelse

$$2 : \frac{1}{2} =$$

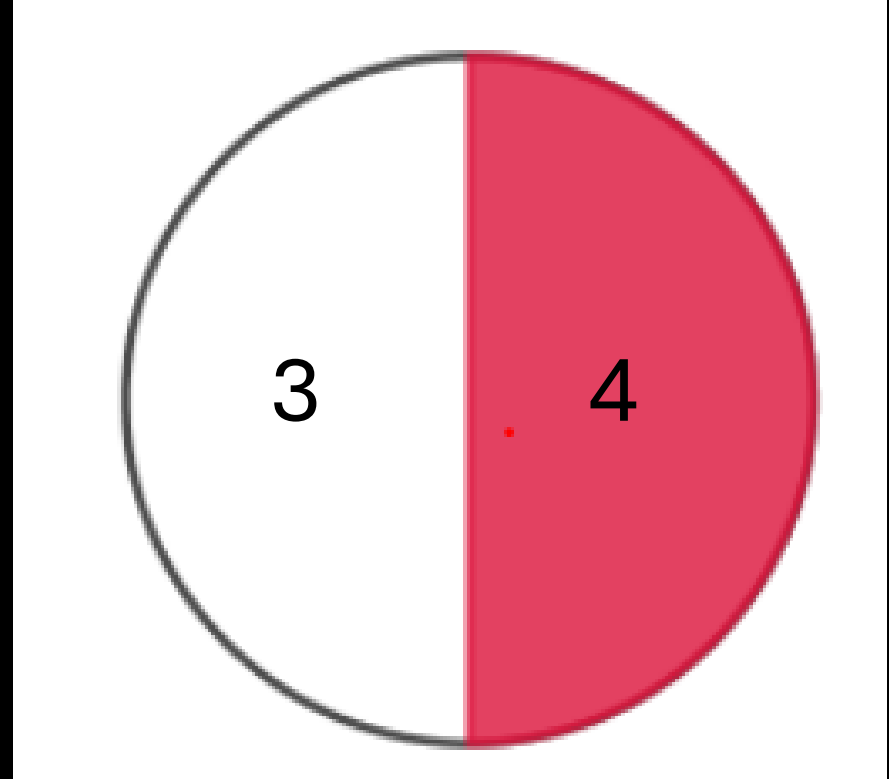
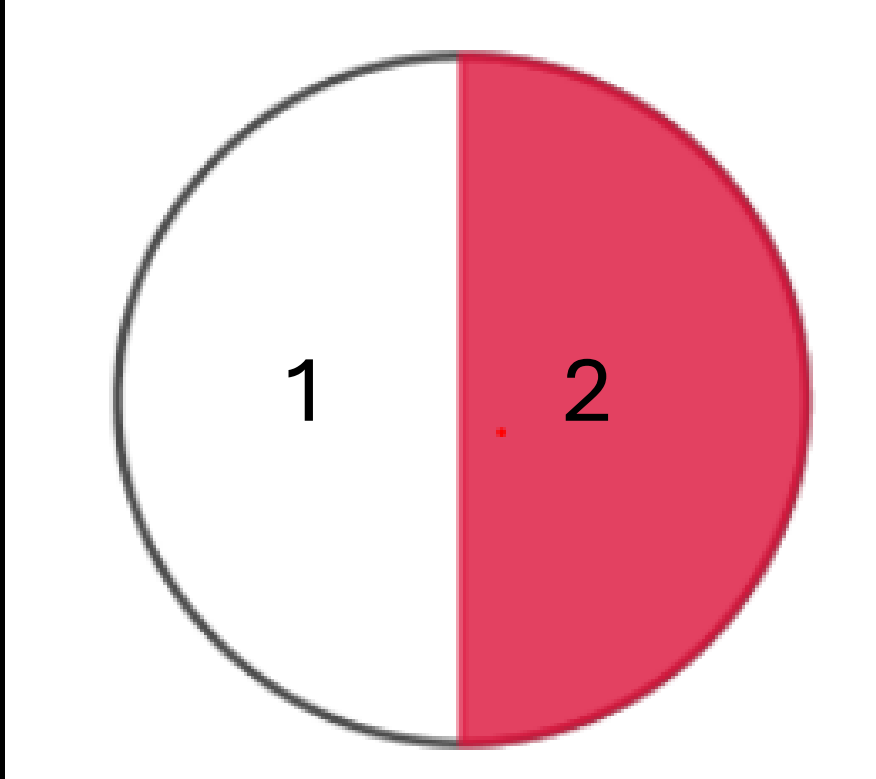
Hvad nu hvis opgaven var $12 : 3 =$

Hvad nu hvis eleven er vant til at arbejde
med visualisering i løsningsprocessen?
... eller tænke i mulige kontekster?

$$2 : \frac{1}{2}$$

Målingsdivision

- Jeg har 2.
- Hvor mange halve kan jeg få?



Instrumentel og
relationel
forståelse
(Richard Skemp)

Udfordringer i matematikundervisningen:

Elevens mål er en instrumentel
forståelse, men læreren underviser
efter en relationel forståelse

Elevens (og evt. lærerens) mål er en
relationel forståelse, men læreren
underviser efter en instrumentel
forståelse

... problemet er
måske ikke
division med
brøker!

- Den didaktiske kontrakt (Brousseau, 1984)
 - Hvilke forventninger har både elever og matematiklærere når de træder ind i matematikundervisningen /møder opgaverne?
 - Kan vi udfordre den kontrakt?
- Sociomatematiske normer i klassen (Cobb & Jackel i Skott, 2008)
 - Hvad er en god eller bare en acceptabel matematisk forklaring
 - Hvad er vigtigt?
 - Hvilke spørgsmål stiller læreren
 - Hvilke form og indhold for feedback (inkl. løbende feedback i undervisningen)

- Hvordan regner du?
- Dine elever?
 - Skriv ned 2 – 3 strategier du forventer at se hos dine elever
- ... og de danske elever i 3. 6. og 8. klasse?

$$199 + 323$$

199 + 323 i 3., 6. og 8. klasse

$$\begin{array}{r} 199 \\ + 323 \\ \hline 522 \end{array}$$

3. 61,4 %
6. 67,8 %
8. 85 %

$$\begin{aligned} 300 + 100 &= 400 \\ 90 + 20 &= 110 \\ 9 \cdot 3 &= 12 \\ 400 + 110 + 12 &= 522 \end{aligned}$$

3. 5 %
6. 8,5 %
8. 3,4 %

$$\begin{aligned} 200 & \\ 199 + 323 & \\ \hline 200 + 322 & \end{aligned}$$

3. 1,3 %
6. 7,5 %
8. 3,4 %



3. 7,6 %
6. 4,5 %
8. 3,4 %

$$\begin{aligned} 200 + 323 &= 523 \\ 523 - 1 &= \underline{522} \end{aligned}$$

3. 2,5 %
6. 2,5 %
8. 1 %

$$\begin{aligned} 9 + 3 &= 12 \\ 1 + 2 + 9 &= 12 \\ 3 + 1 + 1 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 99 + 23 &= 122 \\ 300 + 100 &= 400 \end{aligned}$$

Eksempel:
Andre forskellige metoder

DE FIRE REGNEARTER

FP9 2019

(64 331 ELEVER)

1072 + 4038

701 - 149

350 · 9

7021 : 7

% fejl	Fejsvar	Antal forkert svar pr fejlsvar
7 %	5100	1424
	5010	350
	6110	220
30 %	462	2656
	550	2245
	562	2221
	648	2101
	652	1772
16 %	3050	715
	3250	654
	2745	480
31 %	103	10993
	13	633
	703	445

5
6 10 11
701
- 149

462

DE FIRE REGNEARTER

FP9 2019

(64 331 ELEVER)

	% fejl	Fejsvar	Antal forkert svar pr fejlsvar
1072 + 4038	7 %	5100 5010 6110	1424 350 220
701 - 149	30 %	462 550 562 648 652	2656 2245 2221 2101 1772
350 · 9	16 %	3050 3250 2745	715 654 480
7021 : 7	31 %	103 13 703	10993 633 445

$$\begin{array}{r}
 61011 \\
 701 \\
 - 149 \\
 \hline
 562
 \end{array}$$

DE FIRE REGNEARTER

FP9 2019

(64 331 ELEVER)

	% fejl	Fejsvar	Antal forkert svar pr fejlsvar
1072 + 4038	7 %	5100	1424
		5010	350
		6110	220
701 - 149	30 %	462	2656
		550	2245
		562	2221
		648	2101
		652	1772
350 · 9	16 %	3050	715
		3250	654
		2745	480
7021 : 7	31 %	103	10993
		13	633
		703	445

$$\begin{array}{r} 701 \\ - 149 \\ \hline 648 \end{array}$$

DE FIRE REGNEARTER

FP9 2019

(64 331 ELEVER)

1072 + 4038

701 - 149

350 · 9

7021 : 7

% fejl	Fejsvar	Antal forkert svar pr fejlsvar
7 %	5100	1424
	5010	350
	6110	220
30 %	462	2656
	550	2245
	562	2221
	648	2101
	652	1772
16 %	3050	715
	3250	654
	2745	480
31 %	103	10993
	13	633
	703	445

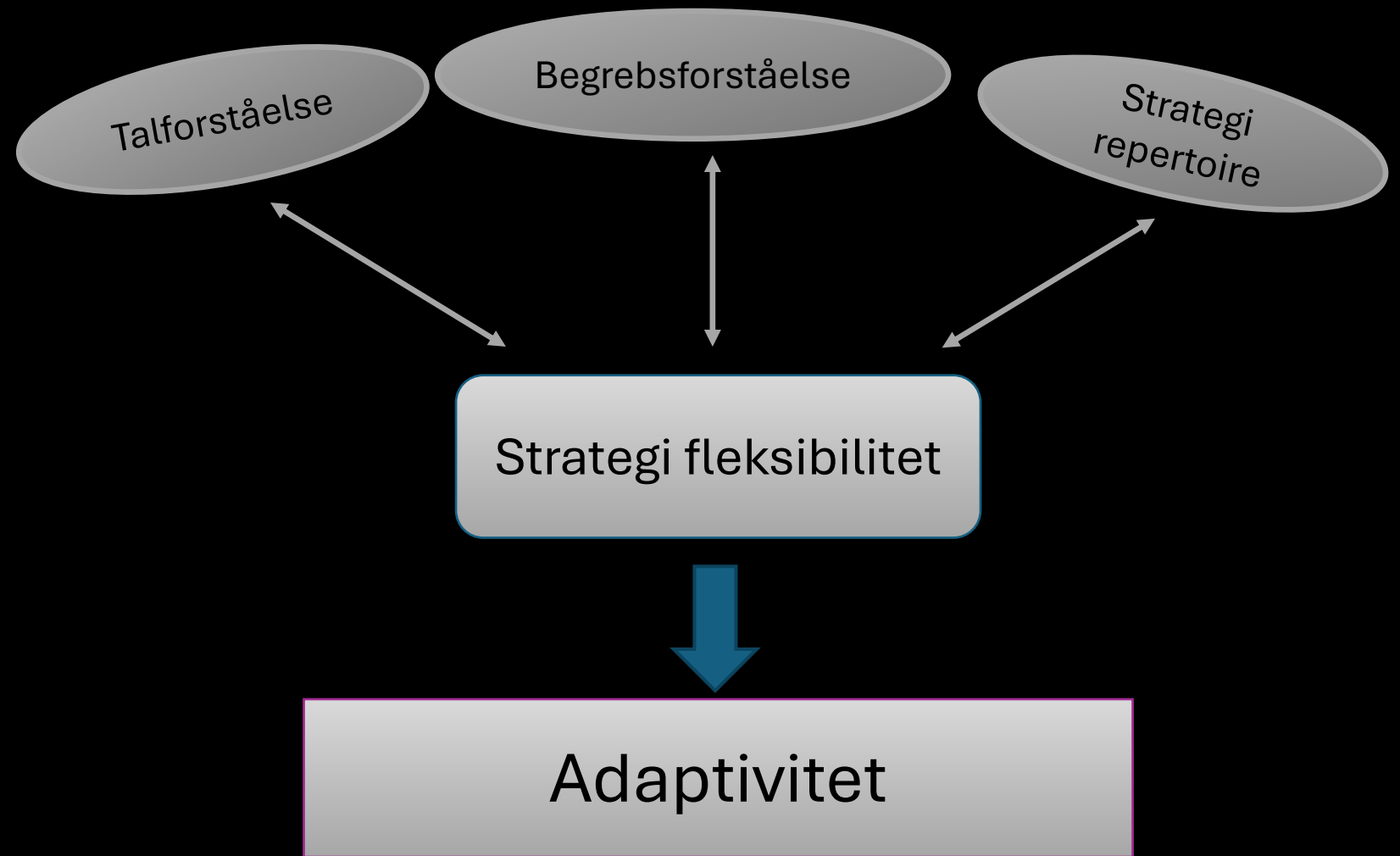


$$\begin{array}{r}
 911 \\
 701 \\
 - 149 \\
 \hline
 652
 \end{array}$$

Fleksibilitet & adaptivitet

- **Fleksibilitet:** Viden om forskellige strategier til løsning af et givet problem og evnen til at anvende og skifte i mellem disse strategier
- **Adaptivitet:** Evnen til at vælge hensigtsmæssige strategier til løsning af et givet problem
- Et *adaptivt strategivalg* er et bevidst eller ubevidst valg og anvendelse af den mest hensigtsmæssige løsningsstrategi til et givet matematikproblem, for den enkelte person, i en given sociokulturel kontekst (Verschaffel, Torbeyns & Van Dooren, 2009).

Fleksibilitet og adaptivitet



Talforståelse som forudsætning til regnestrategier

- Forstå tals størrelse og placering
 - At kunne placere tal på en tallinje
 - 199 er 1 mindre end 200
 - Hvis 8 og 2 er 10'er venner må 8 og 3 være én mere dvs. 11
 - 0,9 er større end 0,15
- Forstå 10'talssystemets opbygning
 - $345 = 300 + 40 + 5$
 - $0,15 = 0,10 + 0,05$
 - $0,15 = \frac{1}{10} + \frac{5}{100}$

Begrebsforståelse som forudsætning for regnestrategier

Fx

- Sammenhæng mellem addition og subtraktion samt multiplikation og division
- Subtraktion som forskel mellem to tal
- At kunne omformulere regneudtryk til kontekst fx
 - $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$ til det halve **AF** en fjerdedel

Shortcut strategier

De strategier, hvor udregningsprocessen er gjort mere simpel i form af færre steps og simple beregninger,

- Addition

Fx $482 + 218$

$$\begin{aligned} 482 + 18 &= 500 \\ 500 + 200 &= 700 \end{aligned}$$

- Subtraktion

Fx $673 - 199$

$$\begin{aligned} 673 + 1 \\ 199 + 1 \\ \hline 674 - 200 &= 474 \end{aligned}$$

TAL OG SYMBOLBEHANDLING

DE CENTRALE MÅL DREJER SIG OM, AT ELEVEN KAN:

- **ARBEJDE MED TAL OG SYMBOLBEHANDLING, FORMLER OG UDTRYK SELVSTÆNDIGT.**
- **FORSTÅ OG ANVENDE MATEMATISKE BEGREBER OG METODER I SAMMENHÆNG MED PRAKTISKE/ERHVERVSMÆSSIGE PROBLEMSTILLINGER.**
- **OPSTILLE MODELLER OG LØSE PRAKSISORIENTEREDE PROBLEMSTILLINGER (MATEMATISK MODELLERING), SAMT TOLKE OG VURDERE RESULTATER.**
- **KOMMUNIKATION OM MATEMATIK: BÅDE MUNDTLIGT OG SKRIFTLIGT, OG BÅDE I HVERDAGSSPROG OG MATEMATISK SYMBOLSPROG.**

VEJLEDNING I FAGET MATEMATIK (EUD) S.1 1

- "FOR AT KUNNE ANVENDE MATEMATIKKEN SOM MODEL, ER DET HELT CENTRALT AT KUNNE TÆNKE MATEMATISK OM PRAKTISKE UDFORDRINGER (TANKEGANG) OG AT KUNNE HÅNDTERE DE TAL, FORMLER OG SYMBOLER, SOM BRUGES I MATEMATIKKENS BESKRIVELSE AF FORHOLD I ERHVERVENE OG I HVERDAGEN (SYMBOL OG FORMALISME). DET ER LIGELEDES NØDVENDIGT AT KUNNE KOMMUNIKERE OM SINE LØSNINGER (KOMMUNIKATION)..."

OM OVERSLAGSREGNING (E & F)

VEJLEDNING S. 16

- "ENDELIG KAN OVERSLAGET BIDRAGE TIL, **AT ELEVEN ELLER LÆRLINGEN TILEGNER SIG REGNESTRATEGIER, DER BESTÅR AF FORSTÅELSE AF TALLENE.** ET OVERSLAG GØRES TYPISK I HOVEDET. HVIS ELEVEN ELLER LÆRLINGEN EKSEMPELVIS SKAL GIVE ET OVERSLAG PÅ AREALET AF EN TERRASSE, DER ER 9,8 LANG BRED OG 5,2 METER BRED, ER DER TALE OM, AT TERRASSEN ER "LIDT MINDRE END 10 METER PÅ DEN ENE LED OG LIDT MERE END 5 METER PÅ DEN ANDEN LED". OPGAVEN ER DERMED REDUCERET TIL HOVEDREGNINGSOPGAVEN 10 M X 5 M."

KOMMUNIKATION OG SYMBOLHANDLING

NUMBER TALK

- - MÅL
 - UDVIKLING AF FLEKSIBILITET
 - UDVIKLING AF KLASSEKULTUR HVOR VI DELER VORES MATEMATISKE TANKER MED HINANDEN OG LÆRER AT RESPEKTERE ANDRES MÅDE AT TÆNKE PÅ
- UDFORDREDE ELEVER (OG ALLE ELEVER)
 - ELEVEN FORKLARER MUNDTLIGT – LÆREREN LAVER DEN SKRIFTLIGE NOTATION (EVT. 2 REPRÆSENTATIONER)

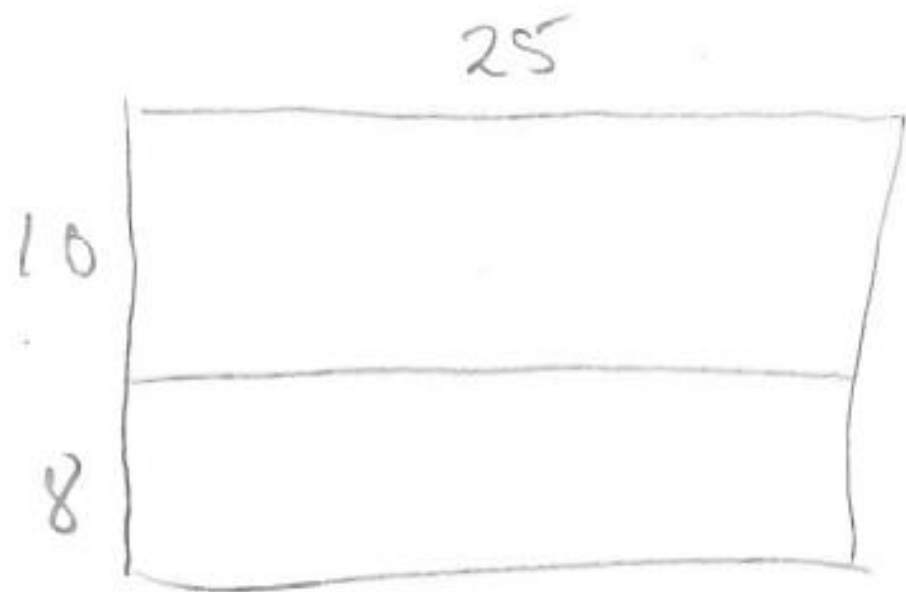
• Vores fleksibilitet / adaptivitet?

- **Løs opgaven på flere forskellige måder, vis hvordan du løser opgaven.**
- Number Talk:
- <https://www.youcubed.org/resources/stanford-onlines-learn-math-teachers-parents-number-talks/>

$$18 \cdot 25$$

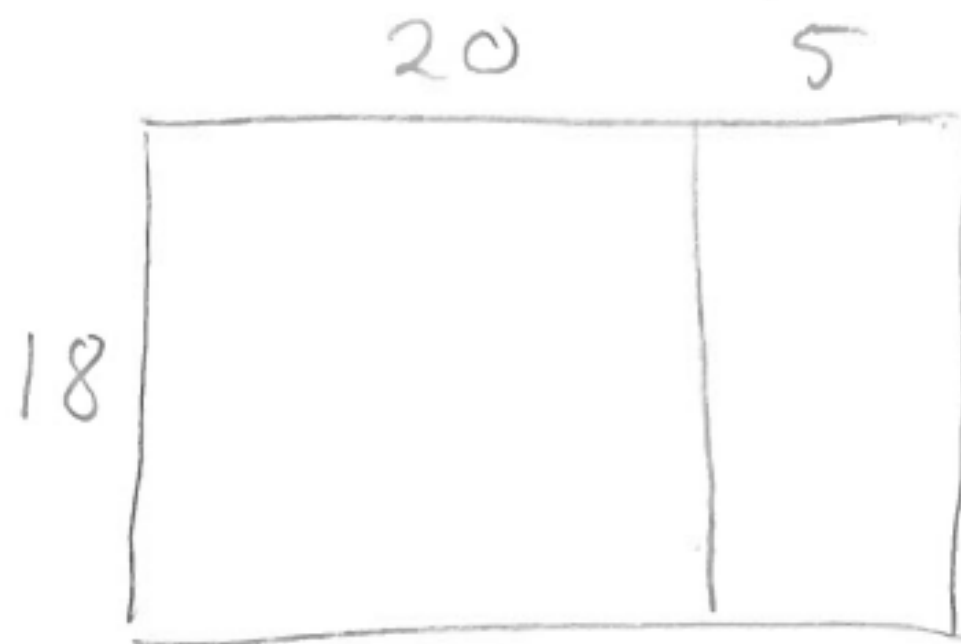
$$10 \cdot 25 = 250$$

$$8 \cdot 25 = 200$$



$$18 \cdot 20 = 360$$

$$18 \cdot 5 = 90$$



$$18 \cdot 25 = 9 \cdot \underset{50}{50} = 450$$



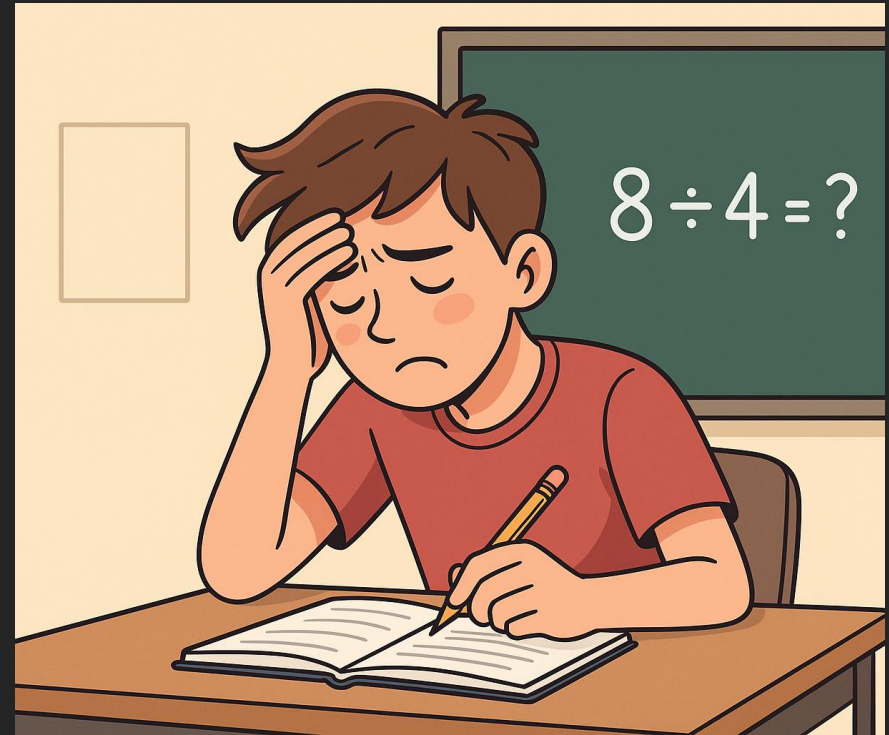
$$20 \cdot 25 = 500$$

$$2 \cdot 25 = 50$$

$$500 - 50 = 450$$



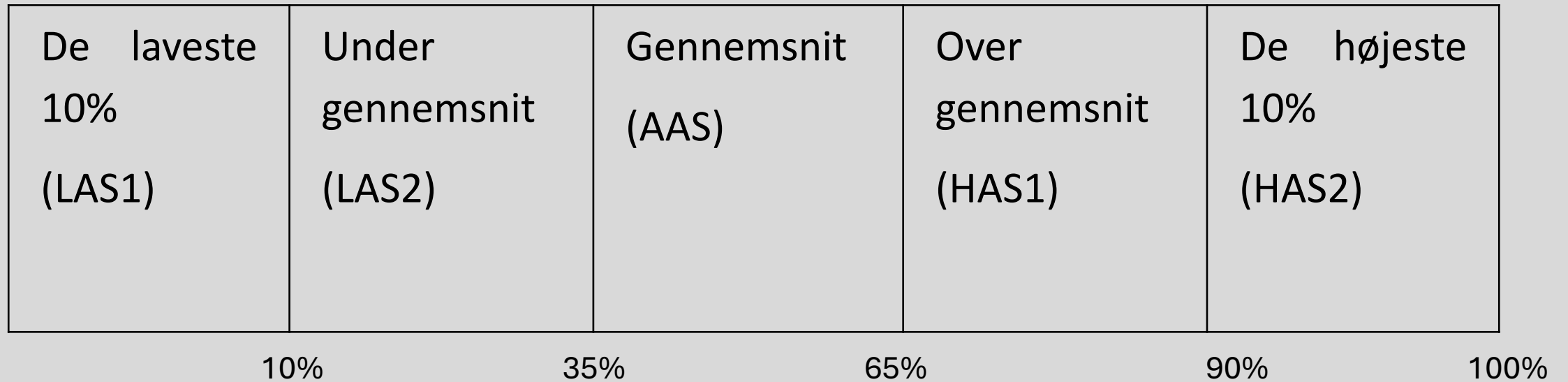
- Elever i matematikvanskeligheder og (regne) strategier



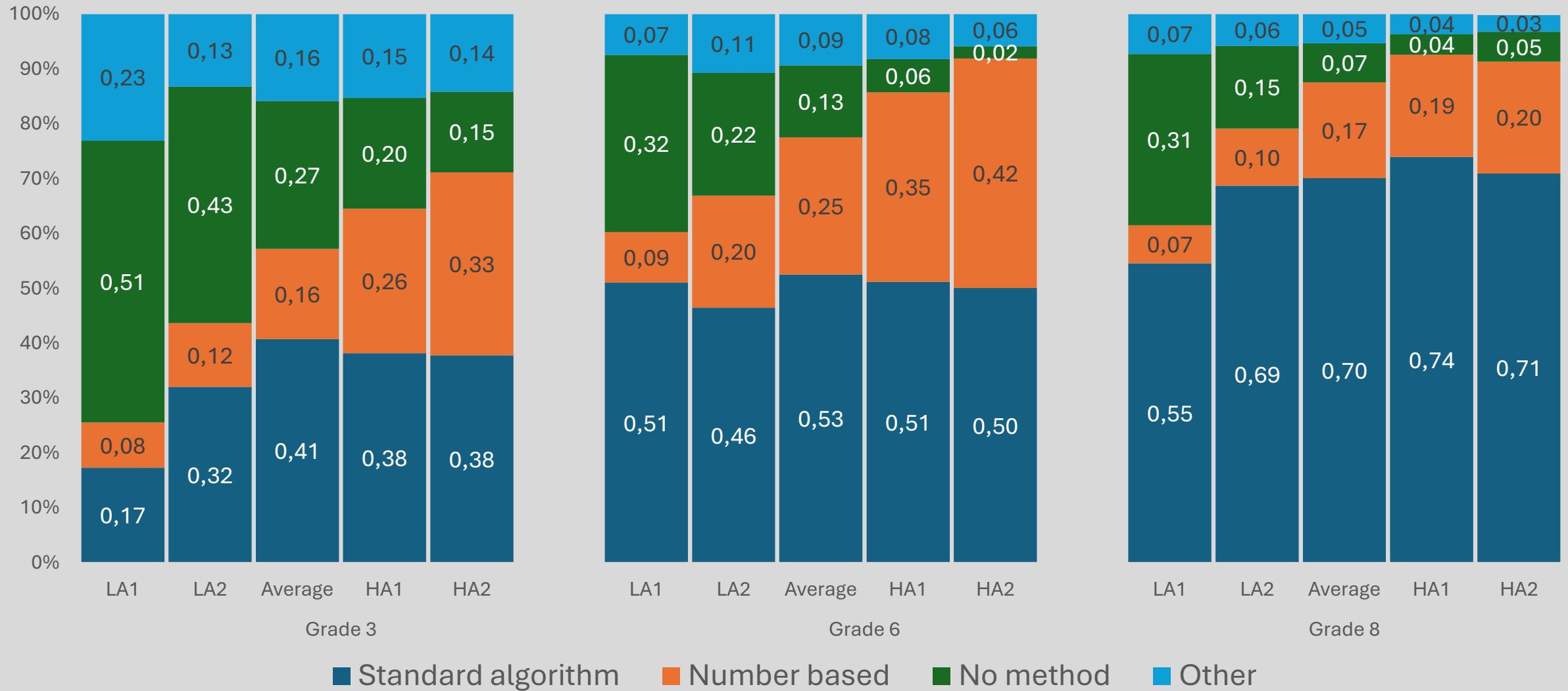
Hvad ved vi om de udfordrede elever og strategibrug?

- Matematikvanskeligheder er ofte relateret til problemer med grundlæggende regnefærdigheder (Funderud et al., 2019; Mazzocco et al., 2008; Vanbinst et al., 2014).
- Elevers strategibrug (hvilke strategier de bruger) er relateret til hvordan elever klarer sig i matematik Fx. (Sunde et al., 2023; Jóelsdóttir et al., 2024)
- Elever der er udfordret i matematik bruger ofte mere primitive strategier, stoler fx på back-up strategies (Ostad, 1999; Siegler, 1987; Verschaffel, Torbeyns, De Smedt, et al., 2007).
- Elever på alle niveauer kan med gode resultater anvender talbaserede strategier, (Peltenburg et al., 2012; Torbeyns et al., 2018; Van Der Auwera et al., 2022)
- Developing flexibility in strategy use is related to knowledge of numbers and number relations (McMullen et al., 2016) and conceptual and procedural knowledge (Rittle-Johnson et al., 2012; Schneider et al., 2011).

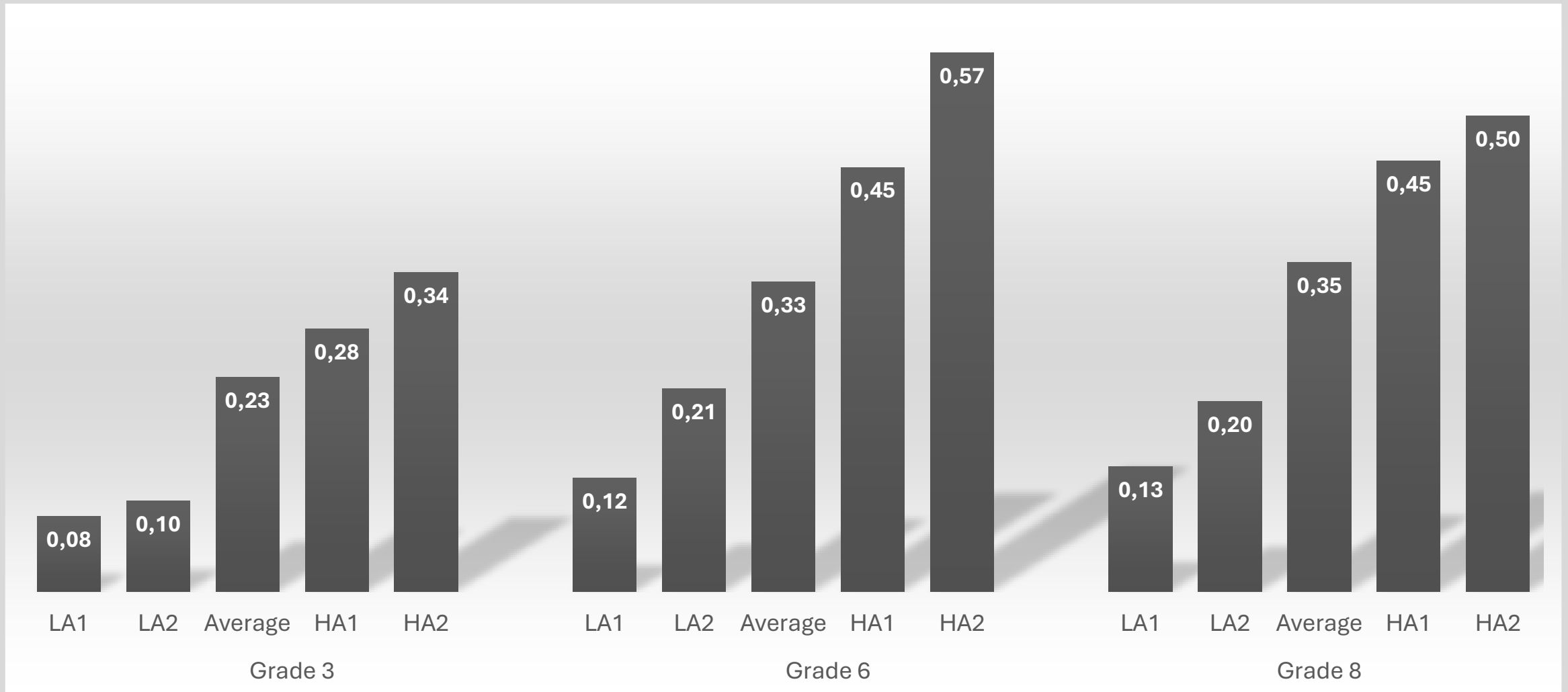
National test: Niveaufordeling



Sammenheng med nationale test



Fleksibilitet og national test



Lidt ekstra om subtraktion

- Subtraktion i tre kontekstuelte forskellige sammenhænge
 - Trække fra – Sammenligninger - Der mangler noget
- Ofte introduceres/eksemplificeres subtraktion næsten udelukkende med 'fjerne'-historier, hvilket er en medvirkende årsag til, at mange elever har svært ved at udvikle (optimale) talbaserede strategier til subtraktion.
- Udfordrede elever opnår ofte succes ved at anvende indirekte addition (tæl op – hop op)

$$\begin{array}{r} 10 \\ 4 \cancel{0} 12 \\ - 493 \\ \hline 019 \end{array}$$
$$\begin{array}{l} 512 - 493 \\ 493 + 7 = 500 \\ 500 + 12 = 512 \\ 7 + 12 = 19 \end{array}$$

Figur 4 Eksempel på opgaven 512 - 493 løst med standardalgoritme og indirekte addition

Lidt mere om subtraktion

- At omskrive/simplificere opgaver til nemmere opgaver styrker både talforståelsen, forståelse af subtraktion og udvikling af shortcut

$$\begin{array}{r} 364 - 198 \\ +2 \quad +2 \\ \hline 366 - 200 = 166 \end{array}$$



Til diskussion

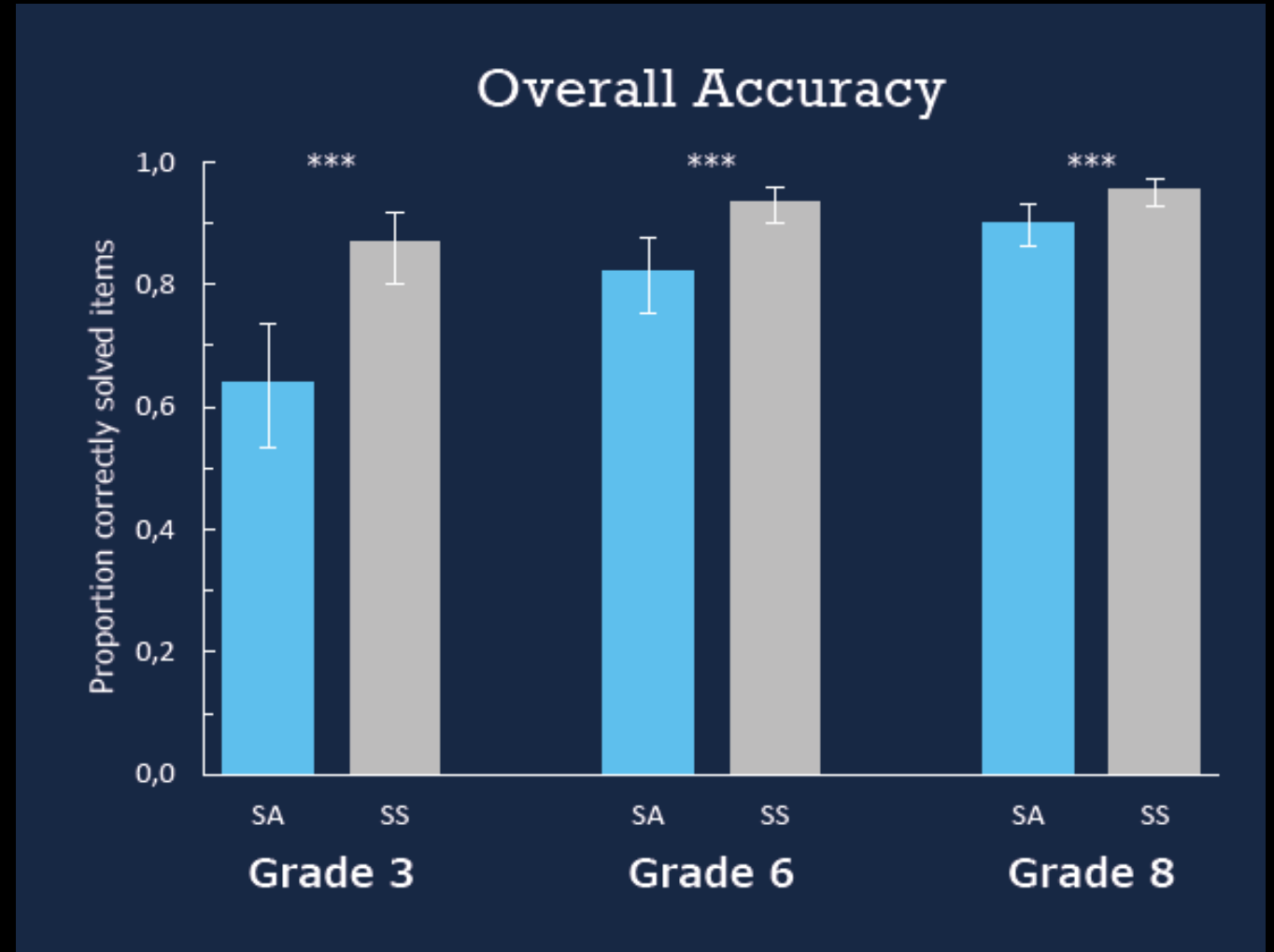
Hvilke erfaringer har I med elever i matematikvanskeligheder
og deres

a. Talforståelse

b. Regnestrategier

Hvornår er det IKKE nok at bruge lommeregner som bro for at
nå frem til en løsning?

Rigtige svar med shortcut vs Standard algoritme



- ... målet er adaptiv ekspertise



Adaptiv & Rutine-ekspertise (Hatano, 1984)

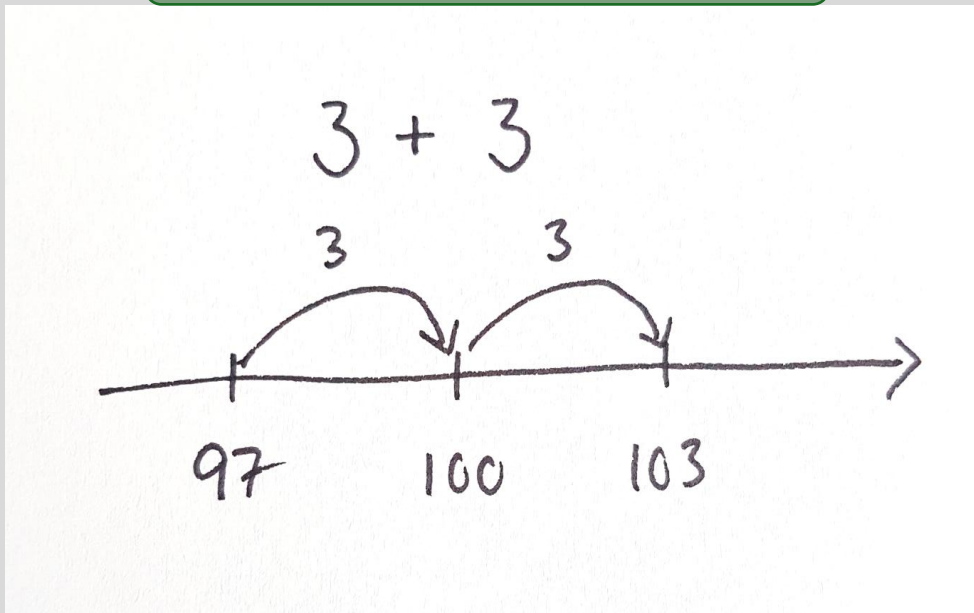
Adaptiv fleksibilitet (Verschaffel et al, 2009) tager udgangspunkt i Hatanos begreb, **adaptiv ekspertise**, som evnen til at anvende hensigtsmæssige lærte metoder fleksibelt og kreativt

Det er i modsætning til **rutine ekspertise**, som kendetegnes ved det at kunne gennemføre matematikopgaver hurtigt og korrekt ved hjælp af de lærte metode, (ofte) uden forståelse.

Adaptive og rutine eksperter

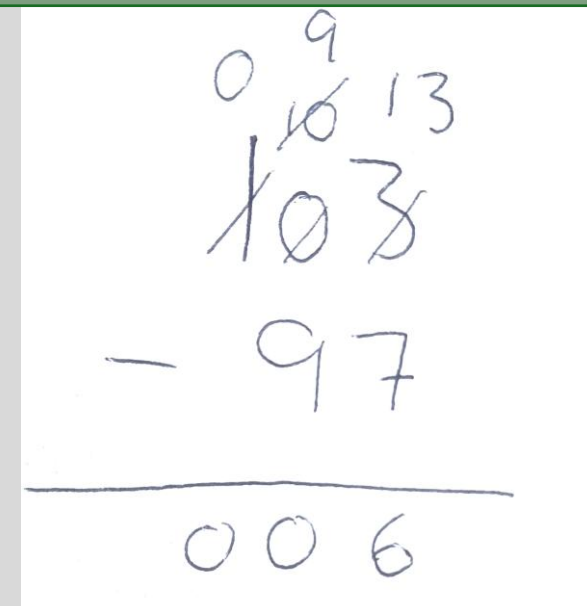
Eksempel: $103 - 97 = 6$

Den adaptive ekspert



Shortcut strategi – talbaseret strategi

Rutine ekspert



Standard algoritme

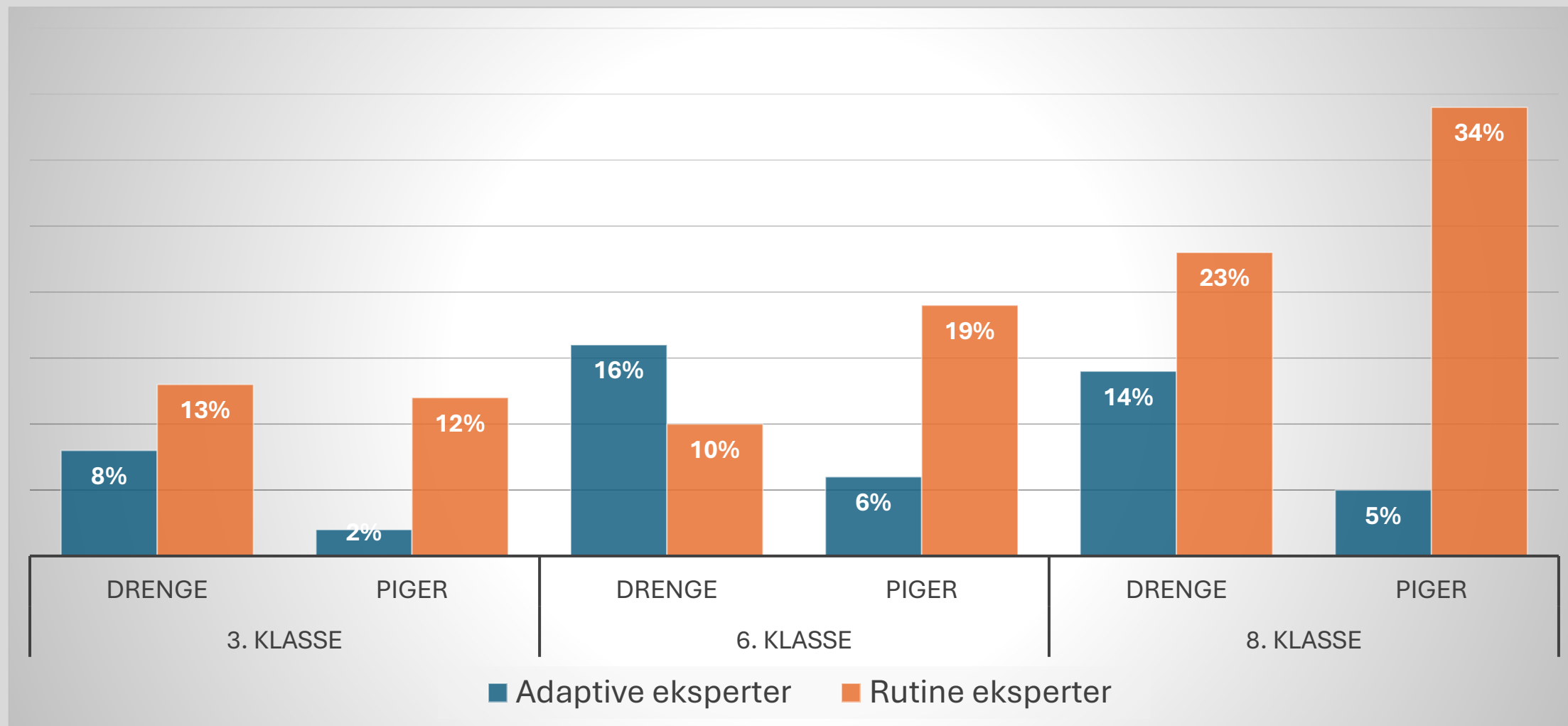
Kønsforskel

- Mellem eller højt niveau for adaptivitet
 - 24,6% af drengene
 - 9,7% af pigerne

Udfordring?

Level of Adaptivity	Piger		Drenge	
	N		N	
INGEN	737	66,3%	536	48,6%
LAV	266	23,9%	296	26,8%
MELLEM	90	8,1%	202	18,3%
HØJ	18	1,6%	70	6,3%
I alt	1111	100%	1104	100%

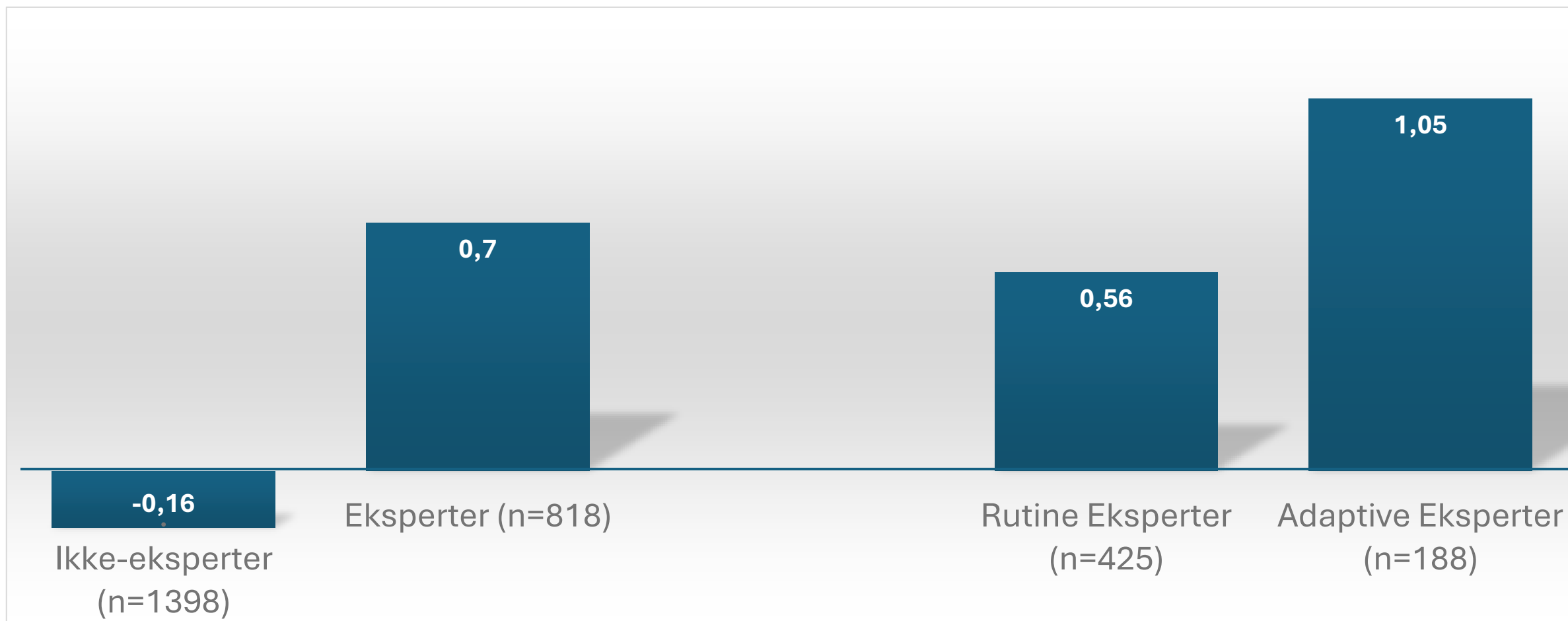
De danske Eksperter - køn



Rutine og adaptive eksperter

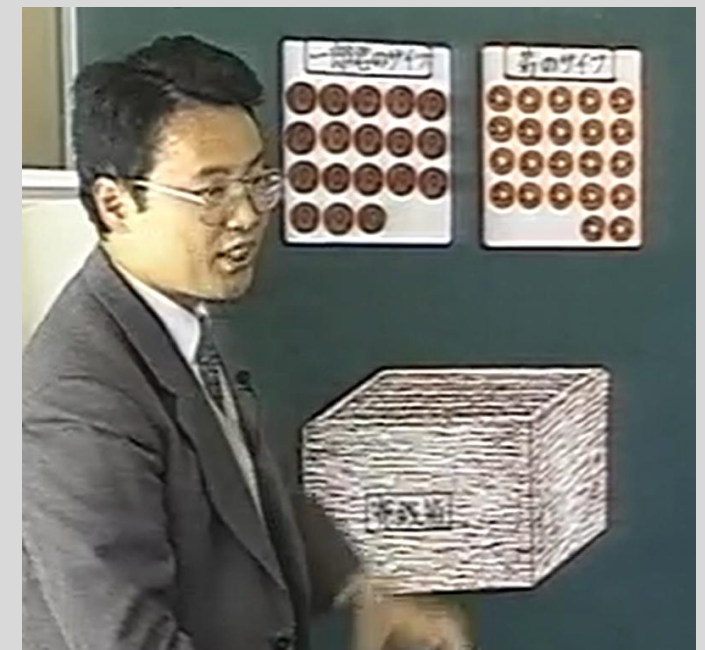
Nationale test i 3. 6. og 8. klasse

Note: Standardised score (mean 0). Standard deviation 1.



Forskellige repræsentationsformer

- Konkret
 - Visuel
 - Abstrakt
-
- Fleksibilitet i repræsentationer - begrebsforståelse
 - Adaptivitet i repræsentationer – individuel, kognitiv proces

A photograph of a chalkboard with handwritten arithmetic. The top part shows a subtraction problem with a 10x10 grid of numbers. The bottom part shows a similar problem with a 10x10 grid of numbers.

	1	2	3	...	14	15	16	17
	170	160	150	...	40	30	20	10

	1	2	3	...	14	15
	105	100	95	...	40	35

$$180 - 10x < 110 - 5x$$

LIGNINGSLØSNING

FOLKESKOLENS AFSLUTTENDE PRØVE UDEN HJÆLPEMIDLER, MAJ 2023

Opgave	Ingen point	Fejlsvær			
7.1	20%	30	7	5	36
7.2	53%	1 (9541 elever)	5	3	2
7.3	71%	3	2	4	5

Opgave 7

Løs ligningerne.

7.1 $6x + 5 = 41$ $x =$

7.2 $4 \cdot (x + 1) = 5x$ $x =$

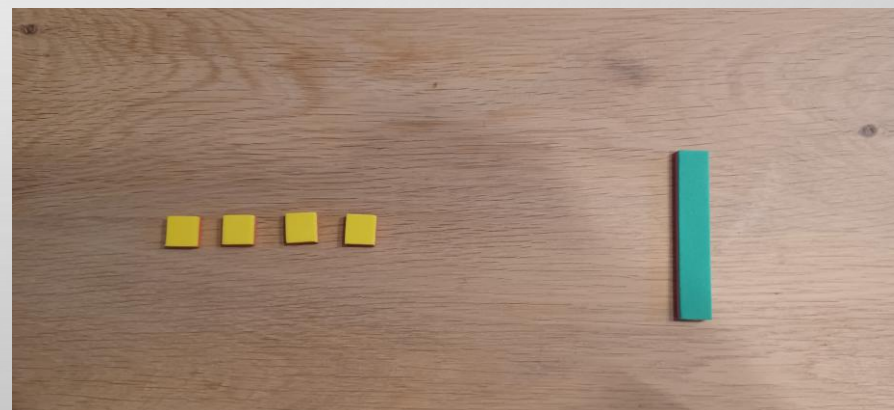
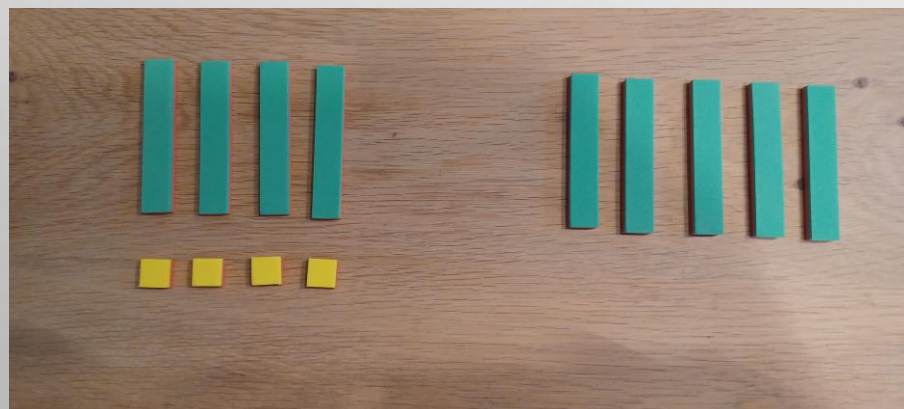
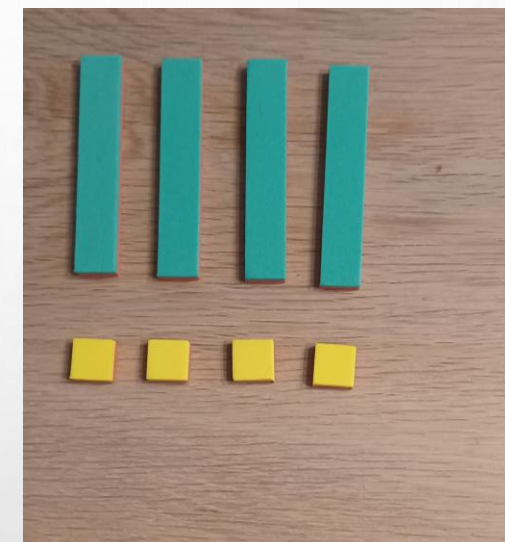
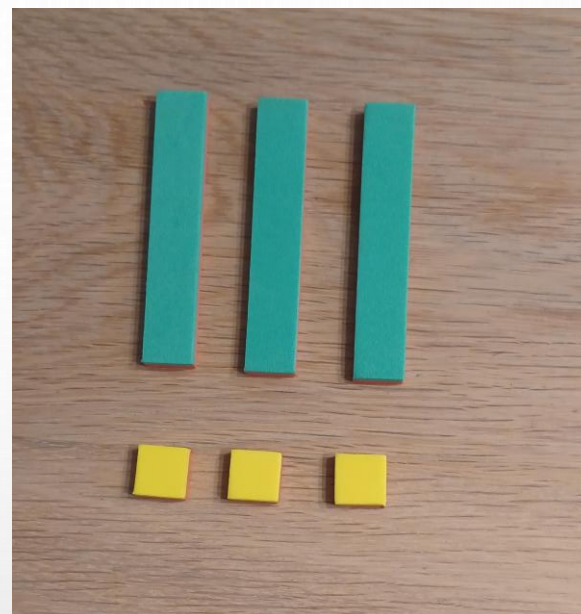
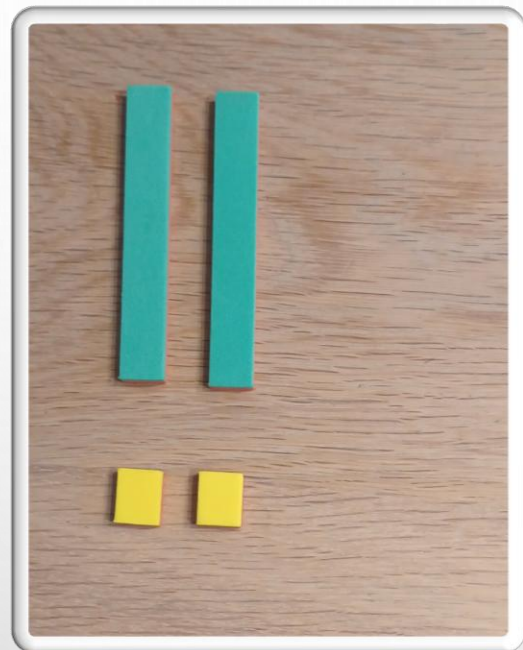
7.3 $\frac{x}{3} + 12 = 2x - 3$ $x =$

DISKUTER:

- LØS OG DISKUTER DE 3 LIGNINGER
 - A. "TRADITIONELT"
 - B. KONKRET/VISUELT
 - C: "SMART"
 - OG ER DER EN MULIG KONTEKST ELLER????
-
- LIGNING 1: $4(x + 1) = 5x$
 - LIGNING 2: $4(x + 2,5) + 5x = 4(x + 2,5) + 10$
 - LIGNING 3: $3(x - 1) = 27$

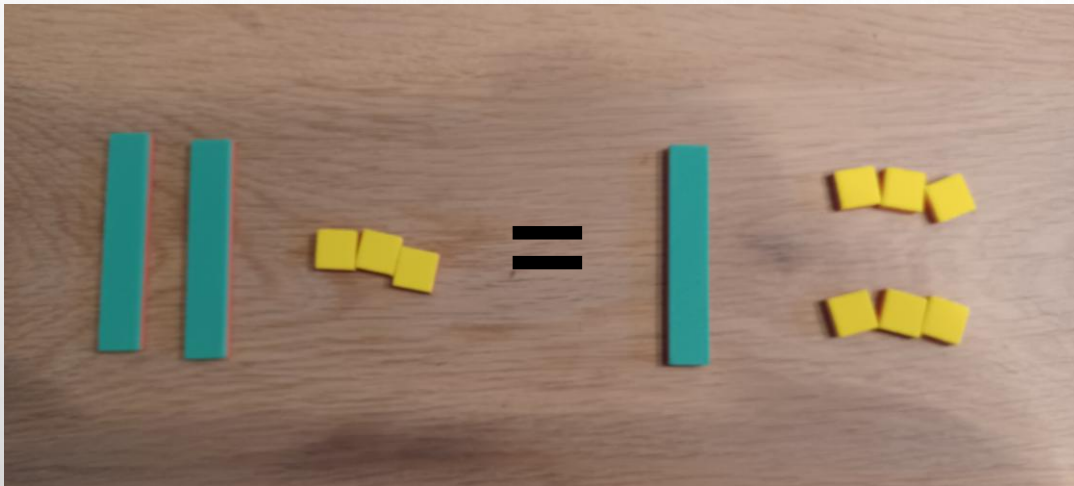
LIGNINGER MED ALGEBRA FLISER (ALGEBRA TILES)

$$4(x + 1) = 5x$$

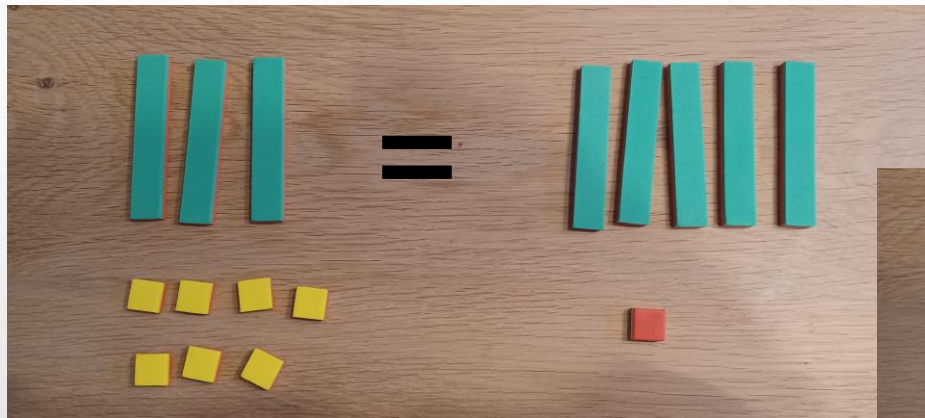


LIGNINGER MED ALGEBRA FLISER (ALGEBRA TILES)

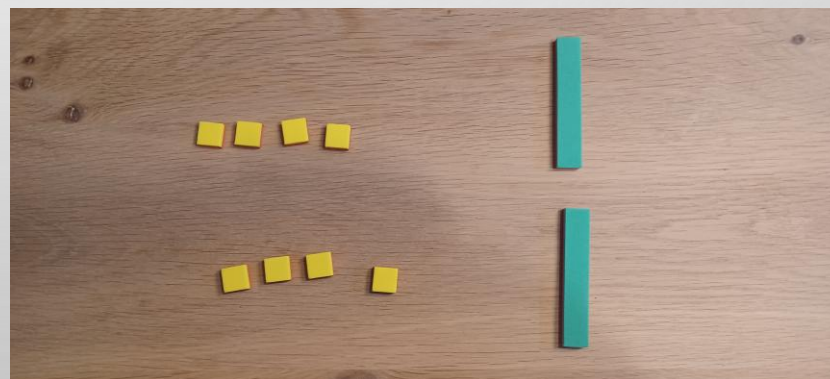
$$2X + 3 = X + 6$$



LIGNINGER MED ALGEBRA FLISER (ALGEBRA TILES)



$$3x + 7 = 5x - 1$$



Opsamling

- Udfordringer i anvendelse af udenadlærte metoder både ved slutningen af 9. klasse og starten af videregående uddannelse
- Arbejdet med udvikling af regnestrategier ses mere som en problemløsningsproces end huskemetoder med træning
- Elever i matematikvanskeligheder mangler ofte strategier
 - Lidt udvikling fra 6. klasse
 - Støtte til udvikling af talbaserede strategier understøtter udvikling af talforståelse og mentale strategier til anvendelse i hverdagen og arbejdslivet
 - Der er sammenhæng mellem manglende fleksibilitet og de lavest præsterende elever
- Brug fx Number Talks, dialog med fokus på forskellige strategier samt anvend forskellige repræsentationer (understøtter også differentiering)
- Adaptiv ekspertise frem for rutine ekspertise
- Fleksibilitet gælder også om anvendelse af flere repræsentationer
 - Konkret (kan være situationer) – visuelt - abstrakt